ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ

ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್ ■ ಕನ್ನಡಕ್ಕೆ : ಅಡ್ಡೂರು ಕೃಷ್ಣ ರಾವ್



ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪ್ರಕಾಶನ

ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್

ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಏಳು ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಅಂಕಗಣಿತವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಡಲೆ ಎಂಬಂತಹ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಸಹ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಮನರಂಜನೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರಸ್ತುತ ಪಡಿಸಿರುವುದು ಇಲ್ಲಿನ ವಿಶೇಷ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ-ಯುವಕರನ್ನು ಈ ಪುಸ್ತಕ ಆಕರ್ಷಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹವಿಲ್ಲ. ವಿವಿಧ ಡಯೊಫಾಂಟೈನ್ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು, ಖಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗವಾಗುವ ಬೀಜಗಣಿತದ ಘಾತಗಳು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ ದೈನಂದಿನ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲೂ ಎದುರಾಗುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನಿಲ್ಲಿ ಸರಳವಾದ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿಡಲಾಗಿದೆ. ಸಂಕೀರ್ಣ - ಬೃಹತ್ ಗಾತ್ರದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಉತ್ತರವಿದೆಯೆಂದು ನೀವು ಈ ಪುಸ್ತಕದಿಂದ ಅರಿಯಬಲ್ಲಿರಿ. ಗಣಿತದ ಗಾರುಡಿಗನೆಂದು ಪ್ರಸಿದ್ಧನಾದ ರಷ್ಯಾದ ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್ ರಚಿಸಿದ ಈ ಕೃತಿಯು ಪ್ರಪಂಚದ ಹಲವಾರು ಭಾಷೆಗಳಿಗೆ ಅನುವಾದಗೊಂಡು ಜನಪ್ರಿಯವಾಗಿದೆ.

* * *

ನಿವೃತ್ತ ಬ್ಯಾಂಕ್ ಅಧಿಕಾರಿಯಾಗಿರುವ ಶ್ರೀ ಅಡ್ಡೂರು ಕೃಷ್ಣರಾವ್ ಬರವಣಿಗೆ ಹಾಗೂ ಸಂಘಟನೆಯಲ್ಲೂ ತಮ್ಮ ಛಾಪು ಮೂಡಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಮೂವತ್ತು ವರ್ಷಗಳಿಂದ ''ಬಳಕೆದಾರರ ವೇದಿಕೆ''ಯ ಸಂಚಾಲಕರಾಗಿ ಗ್ರಾಹಕರ ಹಲವಾರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರ ಸಿಗುವಲ್ಲಿ ಶ್ರಮಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅಂತರ್ಜಾಲದಲ್ಲಿ 'ಜಲಜಾಗೃತಿ' ಬಗ್ಗೆ ಇವರ ಲೇಖನಗಳು ಬಂದಿವೆ. ದಿನಪತ್ರಿಕೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತಿರುವ ಕೃಷಿ ಅಂಕಣದಿಂದಲೂ ಪ್ರಸಿದ್ಧರು. ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್ ಅವರ 'ಮೋಜಿನ ಗಣಿತ'ವನ್ನೂ ಇವರೇ ಅನುವಾದಿಸಿದ್ದಾರೆ. 'ವ್ಯಕ್ತಿ ವಿಕಸನ ಮಾಲೆ'ಯಲ್ಲಿ ಇವರ 'ಮನಸ್ಸಿನ ಮ್ಯಾಜಿಕ್' ಕೃತಿ ಪ್ರಕಟವಾಗಿದೆ. 'ವಿಜ್ಞಾನ ಸರಳ ಪರಿಚಯ' ಮಾಲೆಯ 'ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ' ಕೃತಿಯ ಸಹಲೇಖಕರೂ ಕೂಡ.



ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್



ಅಡ್ಡೂರು ಕೃಷ್ಣ ರಾವ್

ISBN 81-8467-350-7
9 788184 673500

www.navakarnataka.com
facebook.com/navakarnataka

Code : 003916
₹ 190



ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್

ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ

ಕನ್ನಡಕ್ಕೆ

ಅಡ್ಡೂರು ಕೃಷ್ಣ ರಾವ್

ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪ್ರಕಾಶನ

MANARANJANEGAAGI BEEJAGANITA (Kannada)
ALGEBRA CAN BE FUN authored by Yakov Perelman in Russian
Translated from the English version by Addoor Krishna Rao in the series 'Ganita Samvatsara 2012' (National Year of Mathematics - 2012)

Fifth Print : 2021 Pages : 196 Price : ₹ 190
Paper : 70 gsm Maplitho 18.6 Kg ($^1/_8$ Demy Size)

ಮೊದಲನೇ ಮುದ್ರಣ : 2013
ಮರುಮುದ್ರಣಗಳು : 2014, 2016, 2018
ಐದನೇ ಮುದ್ರಣ : 2021

ಬೆಲೆ : ₹ 190

ಮುಖಪುಟ : ಎಂ. ಎಸ್. ಶ್ರೀಕಂಠಮೂರ್ತಿ
ಒಳಚಿತ್ರಗಳು : ವಿ. ಸ್ತುಲಿಕೊವ್, ಎನ್. ಯಾಶ್ಚುಕ್

ಪ್ರಕಾಶಕರು
ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪಬ್ಲಿಕೇಷನ್ಸ್ ಪ್ರೈವೆಟ್ ಲಿಮಿಟೆಡ್
ಎಂಬೆಸಿ ಸೆಂಟರ್, ಕ್ರೆಸೆಂಟ್ ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು – 560 001
ದೂರವಾಣಿ : 080–22161900 / 22161901 / 22161902

ಶಾಖೆಗಳು/ ಮಳಿಗೆಗಳು
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ಕ್ರೆಸೆಂಟ್ ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು – 1, ✆ 080–22161913/14, Email : nkpsales@gmail.com
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ಕೆಂಪೇಗೌಡ ರಸ್ತೆ, ಬೆಂಗಳೂರು – 9, ✆ 080–22203106, Email : nkpkgr@gmail.com
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ಕೆ.ಎಸ್. ರಾವ್ ರಸ್ತೆ, ಮಂಗಳೂರು – 1, ✆ 0824–2441016, Email : nkpmng@gmail.com
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ಬಲ್ಮಠ, ಮಂಗಳೂರು – 1, ✆ 0824–2425161, Email : nkpbalmatta@gmail.com
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ರಾಮಸ್ವಾಮಿ ವೃತ್ತ, ಮೈಸೂರು–24, ✆ 0821–2424094, Email : nkpmysuru@gmail.com
ನವಕರ್ನಾಟಕ, ಸ್ಟೇಷನ್ ರಸ್ತೆ, ಕಲಬುರಗಿ – 2, ✆ 08472–224302, Email : nkpglb@gmail.com

ಮುದ್ರಕರು : ಶೋಭಾ ಪ್ರಿಂಟರ್ಸ್, ಬೆಂಗಳೂರು – 560 021

0512215923 **ISBN 978-81-8467-350-0**

Published by Navakarnataka Publications Private Limited, Embassy Centre Crescent Road, Bengaluru - 560 001 (India). Email : navakarnataka@gmail.com

ಸಂಪಾದಕರ ನುಡಿ

ವಿಶ್ವವಿಖ್ಯಾತ ಗಣಿತ ಪ್ರತಿಭೆ ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್‌ರ 125ನೇ ಜನ್ಮವರ್ಷವಾದ 2012ನೇ ಇಸವಿಯನ್ನು ಭಾರತ ಸರ್ಕಾರವು 'ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಗಣಿತ ವರ್ಷ' ಎಂದು ಘೋಷಿಸಿರುವುದು ಸ್ತುತ್ಯರ್ಹ.

ಈ ಪರ್ವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಾದ್ಯಂತ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಾಗಿ, ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗಾಗಿ ಹಾಗೂ ಗಣಿತಾಭಿಮಾನಿ ಸಾರ್ವಜನಿಕರಿಗಾಗಿ ಗಣಿತದ ವಿವಿಧ ಪ್ರಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮಹತ್ವದ ಮತ್ತು ಸ್ವಾರಸ್ಯಮಯ ವಿಷಯಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಜ್ಞರ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ಕೃತಿಗಳನ್ನು ಹೊರತರಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿ ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪ್ರಕಾಶನ ಸಂಸ್ಥೆಯು ಯೋಜನೆಯೊಂದನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವಂತೆ ಈ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಲಿಗೆ ತಿಳಿಸಿತು. ಅದರಂತೆ ಮಂಡಲಿಯು ತಜ್ಞ ಲೇಖಕರನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಉಪಯುಕ್ತ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಂತೆಯೂ ಇನ್ನು ಕೆಲವನ್ನು ಆಂಗ್ಲಭಾಷೆಯಿಂದ ಅನುವಾದಿಸುವಂತೆಯೂ ಏರ್ಪಾಡು ಮಾಡಿತು. ಈ ಪ್ರಯತ್ನದ ಫಲವಾಗಿ **ವಿಶ್ವದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಮಹಿಳಾ ಗಣಿತಜ್ಞರು, ಮಾಯಾಚೌಕಗಳ ಸ್ವಾರಸ್ಯ, ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾಪದ್ಧತಿ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತ, ಕ್ಯಾಲೆಂಡರ್‌ನೊಂದಿಗೆ ಸಂಖ್ಯಾವಿನೋದ, ಸಂಖ್ಯಾಲೋಕದಲ್ಲಿ ಅಲೆದಾಟ, ಏನು ? ಗಣಿತ ಅಂದ್ರಾ ?, ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ, ಪ್ಲೇಟೋನ ಘನಾಕಾರಗಳು, ಒರಿಗಾಮಿ ಮೂಲಕ ಗಣಿತ** ಮುಂತಾದ ಹೊತ್ತಿಗೆಗಳು ಈಗ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿವೆ. ಹಾಗೆಯೇ, ಖ್ಯಾತ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನ ಲೇಖಕರಾಗಿದ್ದ ಜಿ. ಟಿ. ನಾರಾಯಣರಾಯರ **ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ : ಜೀವನ ಮತ್ತು ಸಾಧನೆ** ಎಂಬ ಕೃತಿಯನ್ನು ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಲು ಸಂತೋಷವಾಗುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮ ಕನ್ನಡ ನಾಡಿನ ಓದುಗರಲ್ಲಿ ಗಣಿತವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷವಾದ ಆಸಕ್ತಿ, ಕುತೂಹಲ ಮತ್ತು ಸ್ಫೂರ್ತಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಈ ಕೈಂಕರ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಶ್ರದ್ಧೆಯಿಂದ ಭಾಗವಹಿಸಿರುವ ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪಬ್ಲಿಕೇಷನ್ಸ್ ಪ್ರೈವೆಟ್ ಲಿಮಿಟೆಡ್ ಸಂಸ್ಥೆಯವರಿಗೆ ನಮ್ಮ ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಲಿಯ ಅಭಿನಂದನೆಗಳು.

ಸಂಪಾದಕ ಮಂಡಲಿ

ಮುಂದಿನ ಪುಟಗಳಲ್ಲಿ......

ಅಧ್ಯಾಯ ಒಂದು – ಘಾತ : ಐದನೆಯ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆ

ಐದನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ ... 9
ಖಗೋಳೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ... 10
ಭೂಮಿಯ ವಾತಾವರಣದ ತೂಕವೆಷ್ಟು ? ... 12
ಉರಿ ಅಥವಾ ಶಾಖವಿಲ್ಲದ ದಹನ ... 13
ಬದಲಾಗುವ ವಾತಾವರಣ ... 14
ಒಂದು ಸಂಯೋಜಿತ ಬೀಗ ... 15
ಮೂಢನಂಬಿಕೆಯ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರ ... 17
ಪುನಃ ಪುನಃ ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸುವುದರ ಫಲಿತಾಂಶ ... 18
ಮಿಲಿಯ ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ ವೇಗದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ... 19
ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಹತ್ತು ಸಾವಿರ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ... 23
ಚದುರಂಗದಾಟಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ ... 25
ಚದುರಂಗ ಯಂತ್ರಗಳ ರಹಸ್ಯ ... 26
ಅಂಕಿ ಎರಡನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಬರೆದು ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ... 31
ಮೂರು ಬಾರಿ ಮೂರು ... 31
ಮೂರು ಬಾರಿ ನಾಲ್ಕು ... 32
ಮೂರು ತದ್ರೂಪಿ ಅಂಕಿಗಳು ... 32
ಒಂದನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಬರೆದು ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ... 33
ಎರಡನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಬರೆದು ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ... 33

ಅಧ್ಯಾಯ ಎರಡು – ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆ

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಕಲೆ ... 35
ಡಯೊಫ಼ಾಂಟಸ್‌ನ ಜೀವಿತಾವಧಿ ... 36
ಕುದುರೆ ಮತ್ತು ಕತ್ತೆ ... 37
ನಾಲ್ವರು ಸೋದರರು ... 38
ನದಿಯ ಬದಿಯ ಎರಡು ಹಕ್ಕಿಗಳು ... 39
ತಿರುಗಾಟಕ್ಕೆ ಹೋದಾಗ ... 41
ಕೊಯ್ಲು ಕೆಲಸ ... 42
ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಹಸುಗಳು ... 46
ನ್ಯೂಟನ್‌ನ ಸಮಸ್ಯೆ ... 48
ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳುಗಳ ಅದಲು ಬದಲು ... 50

ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳುಗಳು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದಾಗುವುದು ... 53
ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು ... 53
ಒಂದು ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಅಸಂಬದ್ಧ ಸಮಸ್ಯೆ ... 57
ಸಮೀಕರಣವೇ ಯೋಚಿಸುತ್ತದೆ! ... 57
ಕುತೂಹಲಕಾರಿ ಮತ್ತು ಅನಿರೀಕ್ಷಿತ ... 58
ಕ್ಷೌರದಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ... 60
ಟ್ರಾಂ ಕಾರುಗಳು ಮತ್ತು ದಾರಿಹೋಕ ... 61
ತೆಪ್ಪಗಳು ಮತ್ತು ಉಗಿ ಬೋಟುಗಳು ... 62
ಕಾಫಿಯ ಎರಡು ಕ್ಯಾನುಗಳು ... 64
ನರ್ತನದ ಜೊತೆಗಾರರು ... 65
ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿ ಬೇಹುಗಾರಿಕೆ ... 65
ಸೈಕಲ್ ಪಥದಲ್ಲಿ ... 67
ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರರ ಸ್ಪರ್ಧೆ ... 69
ಸರಾಸರಿ ವೇಗಗಳು ... 70
ಅತಿವೇಗದ ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳು ... 72

ಅಧ್ಯಾಯ ಮೂರು – ಅಂಕಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ

ದಿಢೀರ್ ಗುಣಾಕಾರ ... 82
1, 5 ಹಾಗೂ 6 ಅಂಕಿಗಳು ... 84
25 ಮತ್ತು 76 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ... 85
ಅನಂತ "ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು" ... 85
ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಪಾವತಿ ... 88
11ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಿಕೆ ... 90
ಲೈಸನ್ಸ್ ಸಂಖ್ಯೆ ... 92
19ರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ ... 93
ಸೋಫೀ ಜರ್ಮೈನ್ ಪ್ರಮೇಯ ... 94
ವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ... 95
ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ... 96
ಅತಿದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ... 97
ಒಂದು ಹೊಣೆಗಾರಿಕೆಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ... 97
ಬೀಜಗಣಿತ ಬಳಸದೆ ಗಣನೆ ಸುಲಭವೆನ್ನಿಸುವುದು ಯಾವಾಗ ? ... 101

ಅಧ್ಯಾಯ ನಾಲ್ಕು – ಡೈಯೊಫಾಂಟೈನ್ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಸ್ವೆಟರ್ ಕೊಳ್ಳುವುದು ... 102
ಲೆಕ್ಕಪತ್ರಗಳ ತಪಾಸಣೆ ... 106

ಅಂಚೆ ಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವುದು ... 108
ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವುದು ... 109
ಜನ್ಮದಿನವನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು ... 110
ಕೋಳಿಮರಿಗಳ ಮಾರಾಟ ... 112
ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹಾಗೂ ನಾಲ್ಕು ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ... 115
ಯಾವ ಬಗೆಯ ಆಯತಾಕೃತಿ ? ... 116
ಎರಡಂಕಿಗಳ ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ... 116
ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ... 117
ಮೂರನೆಯ ಸ್ತರದ ಒಂದು ಅನಿರ್ಧರಣೀಯ ಸಮೀಕರಣ ... 121
ಪ್ರಮೇಯದ ಪುರಾವೆಗೆ ಲಕ್ಷ ರೂ. ಬಹುಮಾನ ... 124

ಅಧ್ಯಾಯ ಐದು – ವರ್ಗಮೂಲ : ಆರನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ

ಆರನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ ... 127
ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು ? ... 128
ಒಮ್ಮೆ ಕಣ್ಣಾಡಿಸಿ ಉತ್ತರಿಸಿ ... 129
ಬೀಜಗಣಿತದ ನಗೆಚಾಟಿಕೆಗಳು ... 130

ಅಧ್ಯಾಯ ಆರು – ದ್ವಿಘಾತದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಹಸ್ತ ಲಾಘವ ... 133
ಜೇನು ಹುಳುಗಳ ದಂಡು ... 133
ಕೋತಿಗಳ ಗುಂಪು ... 135
ದೂರದೃಷ್ಟಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ... 135
ಆಯ್ಲರನ ಸಮಸ್ಯೆ ... 136
ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳು ... 138
ಚಂದ್ರಯಾನದ ಬೀಜಗಣಿತ ... 140
ಒಂದು ಕ್ಲಿಷ್ಟ ಸಮಸ್ಯೆ ... 143
ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ... 145

ಅಧ್ಯಾಯ ಏಳು – ಗರಿಷ್ಠ ಹಾಗೂ ಕನಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯಗಳು

ಎರಡು ರೈಲುಗಳು ... 146
ಧ್ವಜ ನಿಲ್ದಾಣಕ್ಕಾಗಿ ನಿವೇಶನದ ಆಯ್ಕೆ ... 148
ಅನುಕೂಲವಾದ ಹೆದ್ದಾರಿ ... 150
ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುವುದು ಯಾವಾಗ ? ... 151
ಮೊತ್ತವು ಕನಿಷ್ಠವಾಗುವುದು ಯಾವಾಗ ? ... 155

ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರದ ಮರದ ತೊಲೆ ... 155
ಎರಡು ನಿವೇಶನಗಳಿಗೆ ಬೇಲಿ ... 156
ಗಾಳಿಪಟದ ಆಕಾರ ... 156
ಮನೆ ಕಟ್ಟುವುದು ... 157
ಬೇಲಿ ಕಟ್ಟುವುದು ... 159
ಗರಿಷ್ಠ ಅಡ್ಡ ಛೇದದ ತೊಟ್ಟಿ ... 160
ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರದ ಆಲಿಕೆ ... 161
ಅತ್ಯಂತ ಉಜ್ವಲ ಪ್ರಕಾಶ ... 163

ಅಧ್ಯಾಯ ಎಂಟು – ಕ್ರಮಾಗತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಕ್ರಮಾಗತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಂಖ್ಯಾಸರಣಿಯ ಅತಿ ಪ್ರಾಚೀನ ಸಮಸ್ಯೆ ... 165
ಚೌಕಳಿ ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತ ... 167
ತೋಟಕ್ಕೆ ನೀರೆರೆಯುವುದು ... 168
ಕೋಳಿಮರಿಗಳಿಗೆ ಆಹಾರ ನೀಡುವುದು ... 169
ಅಗೆಯುವವರ ತಂಡ ... 170
ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು ... 171
ಕುದುರೆಯ ಖರೀದಿ ... 172
ಸೈನಿಕನ ಗಾಯಗಳಿಗೆ ಸಂಭಾವನೆ ... 173

ಅಧ್ಯಾಯ ಒಂಬತ್ತು – ಏಳನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ

ಏಳನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ ... 175
ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಪ್ರತಿಸ್ಪರ್ಧಿಗಳು ... 176
ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ವಿಕಾಸ ... 177
ಅಪ್ರತಿಮ ಉದ್ದದ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ... 178
ರಂಗಪ್ರದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ... 179
ಜಾನುವಾರು ಸಾಕಣೆಯಲ್ಲಿ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ... 181
ಸಂಗೀತದಲ್ಲಿ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ... 182
ನಕ್ಷತ್ರಗಳು, ಶಬ್ದಗಳು ಮತ್ತು ಲಾಗರಿತಂಗಳು ... 185
ವಿದ್ಯುತ್ ಬೆಳಕಿನ ಪ್ರಕಾಶಕ್ಕೆ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ... 186
ನೂರಾರು ವರುಷಗಳ ಅವಧಿಯ ಉಯಿಲು ... 188
ಬಂಡವಾಳದ ಸತತ ವೃದ್ಧಿ ... 189
ಸಂಖ್ಯೆ e ... 190
ಒಂದು ಲಾಗರಿತಂ ಚಮತ್ಕಾರ ... 192
ಮೂರು ಬಾರಿ ಎರಡು ಬಳಸಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೂಚಿಸುವುದು ... 193

ಅಧ್ಯಾಯ – ಒಂದು

ಘಾತ : ಐದನೆಯ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆ

ಐದನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ

ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು "ಏಳು ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಅಂಕ ಗಣಿತ" ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಕಗಣಿತದ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ – ಈ ನಾಲ್ಕು ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ನಮಗೆ ಪರಿಚಿತ. ಇವುಗಳೊಂದಿಗೆ ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೆರಡು ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಿವಿಧ ಘಾತಗಳಿಗೆ ಏರಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಇದರ ಇನ್ನೆರಡು ವಿಲೋಮ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳು, ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತದ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾಗಿವೆ.

ನಮ್ಮ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಂವಾದವನ್ನು ಐದನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮದಿಂದ ಆರಂಭಿಸೋಣ: ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಘಾತಕ್ಕೇರಿಸುವುದೇ ಐದನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 10ನ್ನು 10ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 100 ಬರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು $10^2=100$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ $10^3=1000$. ಇಲ್ಲಿ 2 ಅಥವಾ 3 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಘಾತ (index) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮ ದಿನನಿತ್ಯದ ವ್ಯವಹಾರಗಳ ನಿರ್ವಹಣೆಗೆ ಈ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆ ಅಗತ್ಯವೇ ? ಹೌದು, ಅಗತ್ಯ ಎನ್ನಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ನಾವು ಅಂತಹ ಹಲವು ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸುತ್ತೇವೆ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಅಥವಾ ಗಾತ್ರದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾದ ಹಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ನೆನೆಯಿರಿ. ಇಂಥ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗ ಅಥವಾ ಘನಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ, ವಿಶ್ವವ್ಯಾಪಿ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣಾ ಬಲ, ಸ್ಥಿರ ವಿದ್ಯುತ್ ಮತ್ತು ಅಯಸ್ಕಾಂತೀಯ ಬಲಗಳ ಅಂತರ್‌ಕ್ರಿಯೆಗಳು, ಚಲಿಸುವ ದೂರದ ವರ್ಗದ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಬಲಗುಂದುವ ಬೆಳಕು ಹಾಗೂ ಶಬ್ದ – ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನೂ ನೆನೆಯಿರಿ. ಸೂರ್ಯನ ಸುತ್ತ ಸುತ್ತುವ ಗ್ರಹಗಳ (ಹಾಗೂ ಗ್ರಹಗಳ ಸುತ್ತ ಸುತ್ತುವ ಉಪಗ್ರಹಗಳ) ಪಥ ಮತ್ತು ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯ ಅವಧಿಗಳು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಈ ಕಾಯಗಳಿಗಿರುವ ಅಂತರದ ಘಾತ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ: ಕಾಯಗಳ ಪಥ ಪರಿಭ್ರಮಣೆಯ ಅವಧಿಗಳ ವರ್ಗಗಳು ಹಾಗೂ ನಡುವಿನ ಅಂತರಗಳ ಘನಗಳು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ದೈನಂದಿನ ಬದುಕಿನಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಘಾತಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳು ಮಾತ್ರ ಅವಶ್ಯವೆಂದೂ, ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳು ಕೇವಲ ಬೀಜಗಣಿತದ ಪುಸ್ತಕಗಳ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗಷ್ಟೇ ಅವಶ್ಯವೆಂದೂ ತಿಳಿಯಬಾರದು. ವಸ್ತುಗಳ (Capacity) ಧಾರಣಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವ ಇಂಜಿನಿಯರುಗಳು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತಗಳ ಹಾಗೂ (ಹಬೆ ಕೊಳವೆಯ ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಾಗ) ಆರನೆಯ ಘಾತಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಎದುರಿಸುತ್ತಲೇ ಇರುತ್ತಾರೆ. ಹರಿಯುವ ನೀರು ಕಲ್ಲುಗಳನ್ನು ಸಾಗಿಸುವ

ಬಲದ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವ ಜಲಶಕ್ತಿ ಇಂಜಿನಿಯರು ಕೂಡ ಆರನೆಯ ಘಾತ ಸಂಬಂಧಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ನದಿಯ ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗ ಇನ್ನೊಂದರ ಪ್ರವಾಹಕ್ಕಿಂತ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಧಿಕ ವೇಗದ ನದಿಯು, ಕಡಿಮೆ ವೇಗದ ನದಿಯು ಒಯ್ಯುವ ಕಲ್ಲುಗಳಿಗಿಂತ 4^6 (ಅಥವಾ 4096) ರಷ್ಟು ಅಧಿಕ ತೂಕದ ಕಲ್ಲುಗಳನ್ನು ಉರುಳಿಸಿ ಒಯ್ಯಬಲ್ಲುದು.*

ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಘಾತದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪರಿಚಯ ನಮಗಾಗುವುದು – ಪ್ರಜ್ವಲಿಸುವ ವಸ್ತುವಿನ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವಿದ್ಯುತ್ ದೀಪದ ತಂತು) ಪ್ರಕಾಶ ಹಾಗೂ ಅದರ ಉಷ್ಣತೆ – ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಾಗ. ತಾಪದ 12ನೆಯ ಘಾತಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಅದರ ದೀಪ್ತಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಕೆಂಪು – ಉಷ್ಣದ 30ನೆಯ ಘಾತಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಅದರ ಪ್ರಕಾಶ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ (–273°C ನಿಂದ ಆರಂಭವಾಗುವ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಉಷ್ಣತೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಲಾಗಿದೆ). ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು 2000° ಯಿಂದ 4000° ಕೆಲ್ವಿನ್ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಉಷ್ಣತೆಗೆ ಕಾಯಿಸಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಅದರ ಉಷ್ಣತೆಯು ಎರಡು ಪಟ್ಟು (2ನೆಯ ಘಾತಕ್ಕೆ) ಏರಿದೆ ಎಂದರಾಯಿತು. ಆಗ, ಅದರ ಪ್ರಕಾಶವು 2^{12} ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಪ್ರಕಾಶವು 4000ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯವೊಂದರಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯುತ್ ದೀಪಗಳ ಉತ್ಪಾದನೆ ಬಗ್ಗೆ ವಿವರಿಸುವಾಗ ಈ ಗಮನಾರ್ಹ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಪುನಃ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.**

ಖಗೋಳೀಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಐದನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಬಳಸುವಷ್ಟು ಇನ್ನಾರೂ ಬಳಕೆ ಮಾಡಲಾರರು. ಇವರು ಸದಾಕಾಲವೂ ಬಳಸುವ ದೈತ್ಯಗಾತ್ರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕೆಲವು ಅಂಕೆಗಳ ಮುಂದೆ ಸೊನ್ನೆಗಳ ದೀರ್ಘ ಸರಮಾಲೆಯನ್ನೇ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಎಲ್ಲ "ಖಗೋಳೀಯ" ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಬರೆಯುವುದೆಂದರೆ, (ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವಾಗ) ಬಹಳ ರೇಜಿಗೆ ಕೆಲಸ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಆಂಡ್ರೊಮೆಡ ನೀಹಾರಿಕೆಗೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಬರೆಯುವುದಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕಿಲೋಮೀಟರುಗಳ ಅಂತರವಿದೆ

95 000 000 000 000 000 000.

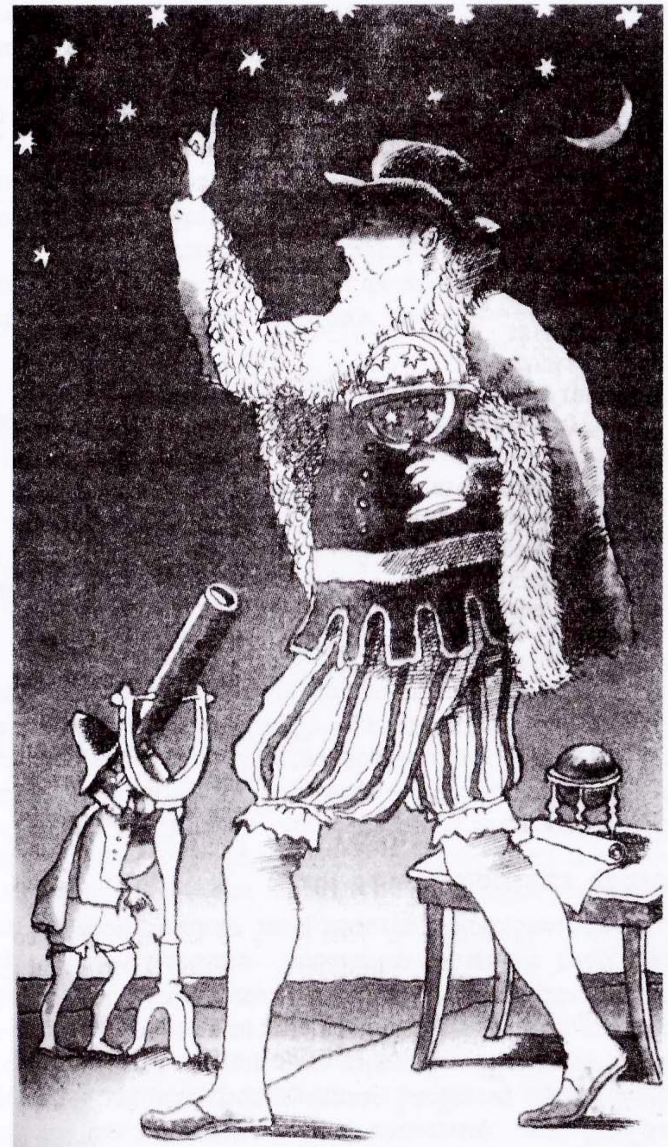
ಈಗ, ಇದನ್ನೇ ಸಣ್ಣ ಮಾನದಲ್ಲಿ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಸೆಂಟಿಮೀಟರುಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. (ಖಗೋಳೀಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಪದೇ ಪದೇ ಹೀಗೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ). ಇದನ್ನು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವಾಗ ಇನ್ನೂ ಐದು ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ:

9 500 000 000 000 000 000 000 000.

---

* ಈ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಗಳು ಇದೇ ಲೇಖಕರ "ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಯಂತ್ರ ವಿಜ್ಞಾನ" ಎಂಬ ರಷ್ಯನ್ ಭಾಷೆಯ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿವೆ.

** ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಈಗ ಒಪ್ಪತಕ್ಕದ್ದಲ್ಲ. ಬಹುಶಃ 1936ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾದ ಒಂದು ಸಂಶೋಧನಾ ಪ್ರಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಘಾತಗಳ ವಿವರಣೆಗೆ ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. – ಸಂಪಾದಕರು



ಚಿತ್ರ 1

ನಕ್ಷತ್ರಗಳ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು, ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲು (ಅನೇಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲೇ ಸೂಚಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ). ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಬೃಹತ್ ಗಾತ್ರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಸೂರ್ಯನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ, ಗ್ರಾಂಗಳಲ್ಲಿ, ಈ ಮುಂದಿನಂತಿದೆ :

1 983 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

ಹಿಡಿತಕ್ಕೇ ಸಿಗಲಾರದ ಇಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳ ತೊಂದರೆಗಳನ್ನೂ, ಆಗಬಹುದಾದ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನೂ ಊಹಿಸುವುದು ಸುಲಭ. ಅದೇನಿದ್ದರೂ, ಈ ಹಿಂದೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇನಲ್ಲ.

ಈ ಕ್ಲಿಷ್ಟ ಸನ್ನಿವೇಶದಿಂದ ಪಾರಾಗಲು ಬಲು ಸುಲಭದ ದಾರಿ ಐದನೆಯ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆ. ಅಂಕೆ ಒಂದರ ಮುಂದೆ ಅನೇಕಾನೇಕ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಬರೆದಾಗ ಅವು ಎಂದಿಗೂ ಹತ್ತರ ನಿಶ್ಚಿತ ಘಾತವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10,000 = 10^4$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಈ ಮುನ್ನ ಸೂಚಿಸಿದ ಎರಡೂ ದೈತ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು :

ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ : 95×10^{23} *

ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ : 1983×10^{30}.

ಈ ವಿಧಾನ ಸ್ಥಳ ಉಳಿಸುವುದಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ, ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನೂ ಸರಳೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಲು ನಾವು ಮಾಡಬೇಕಾದುದಿಷ್ಟೇ : $95 \times 1983 = 188\ 385$. ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು $10^{23+30} = 10^{53}$ ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಿಂದೆ ಬರೆದರಾಯಿತು.

$$95 \times 10^{23} \times 1983 \times 10^{30} = 188\ 385 \times 10^{53}.$$

23 ಸೊನ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆದು ಅನಂತರ 30 ಸೊನ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆದು ಕೊನೆಗೆ 53 ಸೊನ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರೆಯುವುದಕ್ಕಿಂತ ಈ ವಿಧಾನ ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಅನುಕೂಲಕರ. ಅದಲ್ಲದೆ, ಈ ವಿಧಾನ ಸುಲಭಗ್ರಾಹ್ಯ. ಏಕೆಂದರೆ, ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಬರೆಯುವಾಗ ಒಂದೆರಡು ಸೊನ್ನೆಗಳು ಬಿಟ್ಟು ಹೋಗುವ ಸಂಭವ ಜಾಸ್ತಿ; ಅದರಿಂದಾಗಿ ತಪ್ಪುಗಳಾಗುವುದು ಸಹಜ.

ಭೂಮಿಯ ವಾತಾವರಣದ ತೂಕವೆಷ್ಟು ?

ಘಾತಾಂಕಗಳನ್ನು (ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯಾವ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಅಂಕೆ) ಬಳಸಿ, ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸುವ ಬಗ್ಗೆ ಉತ್ತಮ ನಿದರ್ಶನವೊಂದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ: ಭೂ ವಾತಾವರಣದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಗಿಂತ ಭೂಮಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು ಎಷ್ಟು ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸೋಣ.

ಭೂಮಿಯ ಮೇಲ್ಮೈಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಒಂದು ಕಿಲೋ ಗ್ರಾಂ ತೂಕದ ವಾಯುಸ್ತಂಭಕ್ಕೆ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಭೂಮಿಯ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರಿನ ಎಷ್ಟು ಘಟಕಗಳಿವೆಯೋ ಅಷ್ಟೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ

* ಭಾರತದ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಕ್ಲಾರ್ಕ್ ಟೇಬಲ್‌ಗಳಿಂದ. – ಸಂಪಾದಕರು

ವಾಯು ಸ್ತಂಭಗಳಿಂದ ಭೂ ವಾತಾವರಣ ಕವಚವು ರಚಿತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ತಿಳಿದರೆ, ವಾತಾವರಣದ ತೂಕ ಎಷ್ಟು ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ಇದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು : ಆಕರ ಗ್ರಂಥಗಳಿಂದ ಭೂಮಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 510 ಮಿಲಿಯನ್ ಅಥವಾ 51×10^7 ಚದರ ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ಗಳೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಪ್ರತಿ ಚದರ ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಚದರ ಸೆಂಟಿ ಮೀಟರ್‌ಗಳೆಷ್ಟು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡೋಣ. ಪ್ರತಿ ಕಿಲೋಮೀಟರ್ ಉದ್ದದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾವಿರ ಮೀಟರ್‌ಗಳಿದ್ದು ಪ್ರತಿ ಮೀಟರ್‌ನಲ್ಲಿ 100 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಳಿವೆ. ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಕಿಲೋಮೀಟರ್ ಉದ್ದದಲ್ಲಿ 10^5 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಳು ಇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಚದರ ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ನಲ್ಲಿ $(10^5)^2 = 10^{10}$ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಭೂಮಿಯ ಮೇಲ್ಮೈಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಚದರ ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ :

$$51 \times 10^7 \times 10^{10} = 51 \times 10^{17}$$

ಭೂಮಿಯ ವಾತಾವರಣದ ತೂಕವೂ ಇಷ್ಟೇ ಕಿಲೋಗ್ರಾಂಗಳು. ಇದನ್ನು ಮೆಟ್ರಿಕ್ ಟನ್‌ಗಳಿಗೆ ಈ ರೀತಿ ಪರಿವರ್ತಿಸೋಣ :

$$51 \times 10^{17} \div 1000 = 51 \times 10^{17} \div 10^3 = 51 \times 10^{17-3} = 51 \times 10^{14}.$$

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ ಭೂಮಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ

6×10^{21} ಟನ್‌ಗಳು.

ಭೂ ವಾತಾವರಣಕ್ಕಿಂತ ಭೂಮಿಯ ತೂಕ ಎಷ್ಟು ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಭಾಗಿಸೋಣ :

$$6 \times 10^{21} \div 51 \times 10^{14} \approx 10^6,$$

ಅಂದರೆ ವಾತಾವರಣದ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯು ಭೂಮಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯ ಸುಮಾರು ಮಿಲಿಯನ್ನಿನ ಒಂದು ಭಾಗದಷ್ಟಿದೆ.*

ಉರಿ ಅಥವಾ ಶಾಖವಿಲ್ಲದ ದಹನ

ಸೌದೆ ಅಥವಾ ಇದ್ದಿಲು ಉಷ್ಣತೆ ಅಧಿಕವಾಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರವೇ ಉರಿಯುವುದೇಕೆ ಎಂದು ಒಬ್ಬ ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನನ್ನು ಕೇಳಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಿ. ಯಾವುದೇ ಉಷ್ಣತೆಯಲ್ಲೂ ಇಂಗಾಲವು ಆಮ್ಲಜನಕದೊಂದಿಗೆ ಬೆರೆಯುತ್ತದೆ; ಆದರೆ, ಕಡಿಮೆ ಉಷ್ಣತೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಗತಿ ಅತಿ ನಿಧಾನ. (ಅಂದರೆ, ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಣುಗಳು ಮಾತ್ರವೇ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ). ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ದಹನ ನಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೇ ಬಾರದಂತಿರುತ್ತದೆ. ರಸಾಯನ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುವ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ, ಉಷ್ಣತೆಯು 10° ಕಡಿಮೆಯಾದಾಗ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ವೇಗವು (ಅಂದರೆ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವ ಅಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು) 2ರ ಘಾತದಷ್ಟು (ಇಳಿತಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ಘಾತದಷ್ಟು) ಇಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು "ದಹನ"ಕ್ಕೆ ಅಂದರೆ ಸೌದೆಯು ಆಮ್ಲಜನಕದೊಂದಿಗೆ ಬೆರೆಯುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗೆ ಅನ್ವಯಿಸೋಣ. ಒಂದು ಗ್ರಾಂ ಸೌದೆಯು 600° ಉಷ್ಣತೆಯಲ್ಲಿ ಉರಿಯುತ್ತಿದೆಯಾದರೆ, ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡ್‌ನಲ್ಲಿ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಅದು ದಹನವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

* $\approx$ ಈ ಸಂಕೇತವು "ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ ಸಮ" ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಹಾಗಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ಗ್ರಾಂ ಸೌದೆಯು 20° ಉಷ್ಣತೆಯಲ್ಲಿ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ದಹನವಾಗಲು ಎಷ್ಟು ಸಮಯ ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ ? ನಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, $580 = 58 \times 10$ ಡಿಗ್ರಿಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಉಷ್ಣತೆಯಲ್ಲಿ, ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಗತಿಯು 2^{58} ರಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಗ್ರಾಂ ಸೌದೆಯು ಸಂಪೂರ್ಣ ಉರಿಯಲು 2^{58} ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಅವಧಿ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಅವಧಿ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಗಳಾಗಬಹುದು ? ಎರಡನ್ನು ಎರಡರಿಂದ 57 ಬಾರಿ ಗುಣಿಸುವ ಅಥವಾ ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬಳಸುವುದರ ಬದಲು ಅಂದಾಜಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂದಾಜು ಗಣನೆ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ :

$2^{10} = 1024 \approx 10^3$ (ಅಂದಾಜು $\approx$).

ಇದರ ಆಧಾರದಿಂದ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡೋಣ :

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} \div 2^2 = \frac{1}{4} \times 2^{60} = \frac{1}{4} \times (2^{10})^6 \approx \frac{1}{4} \times 10^{18}$$

ಇದು ಕ್ವಿಂಟಿಲಿಯನ್ ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಕಾಲು ಭಾಗದಷ್ಟು ಸಮಯ (ಅಮೆರಿಕ ಮತ್ತು ಫ್ರೆಂಚ್ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯ ಕ್ವಿಂಟಿಲಿಯನ್). ಒಂದು ವರ್ಷ ಎಂದರೆ 30 ಮಿಲಿಯನ್ (ಅಥವಾ 3×10^7) ಸೆಕೆಂಡುಗಳು. ಈ ಪ್ರಕಾರ,

$$\left(\frac{1}{4} \times 10^{18}\right) \div \left(3 \times 10^7\right) = \frac{1}{12} \times 10^{11} \approx 10^{10}.$$

ಅಂದರೆ, ಹತ್ತು ಸಾವಿರ ಮಿಲಿಯನ್ ವರ್ಷಗಳು ! ಉರಿ ಅಥವಾ ಶಾಖವಿಲ್ಲದೆಯೇ ಒಂದು ಗ್ರಾಂ ಸೌದೆಯು ದಹನಗೊಳ್ಳಲು ಹತ್ತು ಸಾವಿರ ಮಿಲಿಯನ್ ವರ್ಷಗಳು ತಗಲುತ್ತದೆ.

ಸೌದೆ ಅಥವಾ ಇದ್ದಿಲಿಗೆ ಬೆಂಕಿ ಹಚ್ಚದೆ ಕೇವಲ ವಾತಾವರಣದ ಉಷ್ಣತೆಯಲ್ಲಿಟ್ಟಾಗಲೂ ಅವು ದಹಿಸುತ್ತಲೇ ಇರುತ್ತವೆ. ಬೆಂಕಿ ಹಚ್ಚುವ ಹಲವಾರು ಉಪಕರಣಗಳ ಶೋಧನೆಯಿಂದಾಗಿ, ಈ ವಿಪರೀತ ನಿಧಾನ ಗತಿಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ವೇಗವನ್ನು ಲಕ್ಷಾಂತರ ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಬದಲಾಗುವ ವಾತಾವರಣ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಮೋಡಗಳಿರುವ, ವಾತಾವರಣ ಅಥವಾ ಮೋಡಗಳಿಲ್ಲದ ವಾತಾವರಣ ಎಂಬ ಒಂದೇ ಲಕ್ಷಣವನ್ನಾಧರಿಸಿದ ವಾತಾವರಣದ ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ದಿನಗಳನ್ನು ಶುಭ್ರ ಅಥವಾ ಮೋಡ ತುಂಬಿದ ಎಂದು ವರ್ಗೀಕರಿಸೋಣ. ಈ ಮಾನದಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನ ಭಿನ್ನ ವಾತಾವರಣವಿರುವ ಅವಧಿ ಹಲವಾರು ವಾರಗಳೇ ಇರಬಹುದೆಂದು ನೀವು ಯೋಚಿಸುತ್ತೀರಾ ?

ಭಿನ್ನ ಭಿನ್ನ ವಾತಾವರಣದ ವಾರಗಳು ಕೆಲವೇ ಕೆಲವು ಅನ್ನಿಸಬಹುದು. ಈ ಮುನ್ನ ತಿಳಿಸಿದ ಲಕ್ಷಣಗಳ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ವಾರಗಳು ಒಂದೆರಡು ತಿಂಗಳುಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲೇ ಮುಗಿದು ಹೋಗುತ್ತವೆ. ಅನಂತರ ಮುಂಚಿನ ವಾತಾವರಣ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನೇ ಹೊಂದಿದ ವಾರವೊಂದು ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿ ಮರುಕಳಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಎರಡೇ ವಾತಾವರಣ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಎಷ್ಟು ರೀತಿಯ ಸಂಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ. ಈ

ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ, ನಾವು ಅನಿರೀಕ್ಷಿತವಾಗಿ ಐದನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಬಿಡಿಸಬೇಕಾದ ಸಮಸ್ಯೆ : ಶುಭ್ರ ಹಾಗೂ ಮೋಡ ತುಂಬಿದ ದಿನಗಳ ಎಷ್ಟು ಬಗೆಯ ದಿನಗಳು ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದು ?

ಪರಿಹಾರ :

ವಾರದ ಮೊದಲ ದಿನ ಶುಭ್ರವಾಗಿ ಅಥವಾ ಮೋಡ ತುಂಬಿದ ದಿನವಾಗಿರಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಎರಡು ಬಗೆಯ ಸಂಯೋಜನೆಗಳು ಸಾಧ್ಯ.

ಎರಡು ದಿನಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ, ಶುಭ್ರವಾದ ಹಾಗೂ ಮೋಡ ತುಂಬಿದ ದಿನಗಳು ಇರುವಂತೆ ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು :

ಶುಭ್ರ ಹಾಗೂ ಶುಭ್ರ (ಅಂದರೆ, ಮೊದಲ ದಿನ ಶುಭ್ರ, ಎರಡನೆಯ ದಿನವೂ ಶುಭ್ರ)

ಶುಭ್ರ ಹಾಗೂ ಮೋಡಾವೃತ

ಮೋಡಾವೃತ ಹಾಗೂ ಶುಭ್ರ

ಮೋಡಾವೃತ ಹಾಗೂ ಮೋಡಾವೃತ

ಹೀಗೆ ವಾರದ ಎರಡು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ 2^2 ವಿಭಿನ್ನವಾದ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದೆ. ಮೂರು ದಿನಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲೆರಡು ದಿನಗಳಲ್ಲಿರಬಹುದಾದ ನಾಲ್ಕು ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಮೂರನೆಯ ದಿನದ ಎರಡು ಬಗೆಯ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು ಸೇರಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಆದ್ದರಿಂದ, 3 ದಿನಗಳಲ್ಲಿರಬಹುದಾದ ಒಟ್ಟು ಸಂಯೋಜನೆಗಳು :

$$2^2 \times 2 = 2^3$$

ಇದೇ ರೀತಿ, ನಾಲ್ಕು ದಿನಗಳಲ್ಲಿರಬಹುದಾದ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ :

$$2^3 \times 2 = 2^4.$$

ಐದು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವಿಭಿನ್ನ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2^5 ಕ್ಕೆ, ಆರು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ 2^6 ಕ್ಕೆ, ಏಳು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ, (ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ) $2^7 = 128$ಕ್ಕೆ ಏರುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಶುಭ್ರ ಹಾಗೂ ಮೋಡತುಂಬಿದ ದಿನಗಳು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ (ಒಂದರ ಬಳಿಕ ಇನ್ನೊಂದು ದಿನಗಳಾಗಿ) ಇರಬಹುದಾದ ವಾರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 128. ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಒಮ್ಮೆ ಕಂಡುಬಂದ ದಿನಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಯು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಬೇಕಾದರೆ, $128 \times 7 = 896$ ದಿನಗಳು ಸರಿಯಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೂ ಮುಂಚೆ ಯಾವುದೇ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆದೀತು. ಆದರೆ, ಪುನರಾವರ್ತನೆಯು ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿ ಆಗಲು 896 ದಿನಗಳು ಸರಿಯಬೇಕು. ಬೇರೆ ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಎರಡು ವರುಷಗಳು ಹಾಗೂ 166 ದಿನಗಳ ಅವಧಿ ಮುಗಿಯುವ ತನಕ, ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಇದ್ದಂತಹುದೇ ವಾತಾವರಣ ಪುನಃ ಕಂಡು ಬಾರದೆ ಇದ್ದೀತು.

ಒಂದು ಸಂಯೋಜಿತ ಬೀಗ

ಒಂದು ಹಳೆಯ ಕಟ್ಟಡದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬೀರು ಸಿಕ್ಕಿತು. ಆದರೆ, ಈ ಬೀರುವಿನ ಬೀಗ ತೆರೆಯುವ ವಿಧಾನ ಯಾರಿಗೂ ತಿಳಿದಿರಲಿಲ್ಲ. ಅದರ ಮೇಲಿದ್ದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಐದು ಲೋಹದ ಪಟ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ 36 ಅಕ್ಷರಗಳಿದ್ದವು ಈ ಅಕ್ಷರಗಳ ಯಾವ ಬಗೆಯ ಸಂಯೋಜನೆಯಿಂದ ಬೀಗ ತೆರೆಯುತ್ತದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿರಲಿಲ್ಲ. ಬೀರುವನ್ನು



ಚಿತ್ರ 2

ಒಡೆಯದೆ ತೆರೆಯಲು, ನಿರ್ಧರಿಸಲಾಯಿತು. ಆದರೆ 36 ಅಕ್ಷರಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಯೋಜನೆಯನ್ನೂ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೊಸ ಸಂಯೋಜನೆಗೆ ಮೂರು ಸೆಕೆಂಡಿನ ಅವಧಿಯಾದರೂ ಆಗುತ್ತಿತ್ತು ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ.

ಮುಂದಿನ ಹತ್ತು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಬೀಗತೆರೆಯಬಲ್ಲ ಸಂಯೋಜನೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದೆಯೇ ?

ಪರಿಹಾರ :

ಪರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಅಕ್ಷರ ಸಂಯೋಜನೆಗಳು ಎಷ್ಟೆಂದು ಮೊದಲು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು.

ಮೊದಲ ಸುತ್ತಿನ 36 ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಕ್ಷರವೂ ಎರಡನೆಯ ಸುತ್ತಿನ 36 ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಜೊತೆ ಸೇರಬಲ್ಲುದು. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಎರಡು ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಾಗುವ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

$$36 \times 36 = 36^2$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಯೋಜನೆಯೊಂದಿಗೂ ಮೂರನೆಯ ಸುತ್ತಿನ 36 ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವೊಂದನ್ನಾದರೂ ಸೇರಿಸಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ, ಮೂರು ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಾಗುವ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ :

$$36^2 \times 36 = 36^3$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ, ನಾಲ್ಕು ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಗಳು 36^4, ಐದು ಅಕ್ಷರಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಗಳು 36^5 ಅಥವಾ 60 466 176 ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಅರವತ್ತು ಮಿಲಿಯಗಳಿಗಿಂತ ಅಧಿಕವಾದ ಈ ಎಲ್ಲ ಸಂಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಹಿಡಿಯುವ ಸಮಯ (ಒಂದು ಸಂಯೋಜನೆಗೆ ತಲಾ 3 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಂತೆ):

$3 \times 60\ 466\ 176 = 181\ 398\ 528$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳು ಅಂದರೆ 50 000 ಗಂಟೆಗಳು ಅಥವಾ ತಲಾ ಎಂಟು-ಗಂಟೆಗಳ ಕೆಲಸದವಧಿಯ 6300 ದಿನಗಳು. ಇದು 20 ವರ್ಷಗಳಿಗಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಅವಧಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, 10 ದಿನಗಳೊಳಗೆ ಆ ಬೀರುವನ್ನು ತೆರೆಯಬಹುದಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆ 6300ರಲ್ಲಿ ಕೇವಲ ಹತ್ತು ಅಥವಾ 630ರಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಾತ್ರ. ಈ ಸಂಭವನೀಯತೆ ಅತ್ಯಲ್ಪ.

ಮೂಢನಂಬಿಕೆಯ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ರಷ್ಯಾದಲ್ಲಿ ಸೈಕಲ್‌ಗಳಿಗೆ ಆರು-ಅಂಕೆಗಳ ಪರವಾನಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹೊಸ ಸೈಕಲ್ ಖರೀದಿಸಿದ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರನೊಬ್ಬ ಪರವಾನಗಿ ಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆಯಬೇಕಾಗಿತ್ತು; ಆದರೆ, ಅವನು ಅಪಘಾತ ಘಟಿಸಬಹುದಾದ ಬಗ್ಗೆ ಮೂಢನಂಬಿಕೆ ಹೊಂದಿದ್ದ, ಇದನ್ನು ಸೈಕಲ್ ಸವಾರರ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ "ಅಂಕೆ-ಎಂಟು" ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಈ ಮೂಢನಂಬಿಕೆಯ ಪ್ರಕಾರ ತನ್ನ ಪರವಾನಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕೆ "8" ಇರುವ ಬಗ್ಗೆ ಚಿಂತಿಸುತ್ತಿದ್ದ. ಈ ಕುರಿತು ತುಸು ಯೋಚಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಅವನು ಸಮಾಧಾನ

ಮಾಡಿಕೊಂಡ. ಏಕೆಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರವಾನಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 10 ಅಂಕೆಗಳು (0, 1, ..., 9) ಇರಬಹುದಾಗಿದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಏಕೈಕ ದುರದೃಷ್ಟದ ಅಂಕೆ 8. ಆದ್ದರಿಂದ, ದುರದೃಷ್ಟದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಸಂಭವ ಹತ್ತರಲ್ಲೊಂದು ಮಾತ್ರ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದ.

ಅವನ ತರ್ಕ ಸರಿಯೇ ?

ಉತ್ತರ :

ಪರವಾನಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 000 001 ರಿಂದ 999 999 ತನಕ ಇರಬಹುದು. ಈ ಪ್ರಕಾರ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 999 999. ಈಗ ಅದೃಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಷ್ಟಿವೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡೋಣ. ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 9 ಅದೃಷ್ಟ ಅಂಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಇರಬಹುದು : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ಇದೇ ರೀತಿ ಎರಡನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲೂ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಇರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡಂಕೆಯ ಅದೃಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $9 \times 9 = 9^2$. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ, ಒಂಬತ್ತು ಅಂಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು, ಮೂರನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬಹುದು; ಈ ಪ್ರಕಾರ ಮೂರಂಕೆಯ ಅದೃಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $9^2 \times 9 = 9^3$.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಆರಂಕೆಯ ಅದೃಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಒಟ್ಟು 9^6. ಈಗ, 000 000 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರವಾನಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ಬಳಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಹಾಗಾಗಿ, ಅದೃಷ್ಟ ಪರವಾನಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಒಟ್ಟು $9^6-1 = 531\ 440$. ಇದು ಮೂಢನಂಬಿಕೆಯ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರ ಯೋಚಿಸಿದಂತೆ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶೇಕಡಾ 90 ಆಗಿಲ್ಲ; ಬದಲಾಗಿ, ಇದು ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶೇಕಡಾ 53ಕ್ಕಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಜಾಸ್ತಿ.

ಏಳಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ, ಅದೃಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ದುರದೃಷ್ಟದ ಸಂಖ್ಯೆ ಜಾಸ್ತಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಓದುಗರೇ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು.

ಪುನಃ ಪುನಃ ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸುವುದರ ಫಲಿತಾಂಶ

ಪುಟ್ಟ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪುನಃ ಪುನಃ ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿದಾಗ, ಅದು ವಿಪರೀತ ವೇಗದಿಂದ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತದೆ; ಇದಕ್ಕೊಂದು ಬೆರಗುಗೊಳಿಸುವ ನಿದರ್ಶನ – ಚದುರಂಗದ ಸಂಶೋಧಕನಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಬಹುಮಾನದ ಕುರಿತಾದ ದಂತಕತೆ.* ಅದರಷ್ಟು ಪ್ರಸಿದ್ಧವಲ್ಲದ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಮುಂದಿವೆ :

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಸರಾಸರಿ 2 ತಾಸುಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಇನ್‌ಫ್ಯುಸೊರಿಯನ್ ಪಾರಾಮೀಸಿಯಂ ಎಂಬ ಏಕಕೋಶ ಜೀವಿಯು ಎರಡು ಅರ್ಧ-ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಹೊಸದಾಗಿ ಹುಟ್ಟಿದ ಪಾರಾಮೀಸಿಯಂಗಳು ಎಲ್ಲವೂ ಬದುಕಿದರೆ, ಒಂದು ಪಾರಾಮೀಸಿಯಂನ ಸಂತತಿಗೆ ಸೂರ್ಯನ ಗಾತ್ರಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾಗಿ ಬೆಳೆಯಲು ಎಷ್ಟು ಸಮಯ ತಗಲುತ್ತದೆ ?

ಆರಂಭದ ದತ್ತಾಂಶ : ಯಾವುದೇ ಪಾರಾಮೀಸಿಯಂ ಸಾಯದಿದ್ದರೆ, 40ನೆಯ

* ಈ ದಂತಕತೆ ಪೆರೆಲ್ಮನ್ ಬರೆದ 'ಮೋಜಿನ ಗಣಿತ' (ನವಕರ್ನಾಟಕ ಪ್ರಕಾಶನ) ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿದೆ.

ಸಂತತಿ ಹುಟ್ಟಿದಾಗ ಒಂದು ಘನಮೀಟರ್ ಗಾತ್ರ ಆಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ನೆನಪಿಡಿ, ಸೂರ್ಯನ ಗಾತ್ರ 10^{27} ಘನ ಮೀಟರ್‌ಗಳಿಗೆ ಸಮ.

ಉತ್ತರ :

ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸಲು, 1 ಘನಮೀಟರನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿದರೆ, 10^{27} ಘನಮೀಟರ್ ತುಂಬುತ್ತದೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬೇಕು. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಪ್ರಕಾರ $2^{10} \approx 1000$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 = 2^{90}.$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, 40ನೆಯ ಸಂತತಿಯು ಸೂರ್ಯನ ಗಾತ್ರಕ್ಕೆ ಬೆಳೆಯಲು, ಮತ್ತೆ 90 ಬಾರಿ ವಿಭಜನೆಯಾಗಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲ ಸಂತತಿಯಿಂದ ತೊಡಗಿ ಒಟ್ಟು ಸಂತತಿಗಳು 40+90 = 130. ಹೀಗೆ 147ನೆಯ ದಿನದಲ್ಲಿ ಹುಟ್ಟಿದ ಸಂತತಿಯೊಡನೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ತಲುಪಬಹುದೆಂದು ತರ್ಕಿಸಬಹುದು.

ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನಿ ಮೆಟಾಲ್ನಿಕೊವ್ ಅವರು ಪಾರಾಮೀಸಿಯಂನ 8061 ವಿಭಜನೆಗಳನ್ನು ಕಣ್ಣಾರೆ ಕಂಡರು. ಅಷ್ಟರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪಾರಾಮೀಸಿಯಂ ಸಾಯದಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂತತಿಯು ಆಕ್ರಮಿಸುವ ಬೆಚ್ಚಿ ಬೀಳಿಸುವ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಓದುಗರೇ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಇನ್ನೊಂದು ಕುತೂಹಲಕಾರಿ ಸಮಸ್ಯೆ ಈ ಮುನ್ನ ಸೂಚಿಸಿದ್ದರ ವಿರುದ್ಧ ಬಗೆಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನೊಳಗೊಂಡಿದೆ.

ಸೂರ್ಯನಂತಹ ನಕ್ಷತ್ರವು ಎರಡು ಅರ್ಧ-ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜನೆಯಾಗಿ, ಮತ್ತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅರೆಭಾಗವೂ ಅರ್ಧರ್ಧ ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜನೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸೋಣ. ಈ ರೀತಿ ವಿಭಜನೆಯಾಗುತ್ತಾ, ಸೂರ್ಯ ನಕ್ಷತ್ರವು ಇನ್‌ಫ್ಯುಸೊರಿಯನ್ ಗಾತ್ರಕ್ಕಿಳಿಯಲು ಎಷ್ಟು ವಿಭಜನೆಗಳು ಅವಶ್ಯ ?

ಇದರ ಉತ್ತರ 130 ಎಂಬುದು ಓದುಗರಿಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದರೂ, ಈ ಉತ್ತರಕ್ಕೂ ನಮ್ಮ ಅಂದಾಜಿಗೂ ಬೆರಗುಗೊಳಿಸುವಷ್ಟು ಅಂತರವಿದೆ. ಇದೇ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನನಗೊಬ್ಬರು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕೇಳಿದರು:

ಒಂದು ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಎರಡು ಅರ್ಧ-ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಹರಿಯಬೇಕು; ಅದರಲ್ಲೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು ಪುನಃ ಅರ್ಧ-ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಹರಿಯಬೇಕು. ಈ ರೀತಿ ಹರಿಯುತ್ತಾ, ಕಾಗದವನ್ನು ಪರಮಾಣುವಿನ ಗಾತ್ರಕ್ಕಿಳಿಸುವ ಎಷ್ಟು ವಿಭಜನೆಗಳು ಅವಶ್ಯ ?

ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯ ತೂಕ ಒಂದು ಗ್ರಾಂ ಮತ್ತು ಪರಮಾಣುವಿನ ತೂಕ $\frac{1}{10^{24}}$ ಗ್ರಾಂ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಈ ಮುಂದಿನಂತೆ ತರ್ಕ ಮಾಡೋಣ. ಇಲ್ಲಿ 10^{24} ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗಿ, ಇದಕ್ಕೆ ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮವಾದ 2^{80} ಅನ್ನು ಬಳಸಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ, ಕೇವಲ 80 ವಿಭಜನೆಗಳು ಅವಶ್ಯ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಇದಕ್ಕೂ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಉತ್ತರವಾಗಿ ಹೇಳಲಾಗುವ ಮಿಲಿಯಗಟ್ಟಲೆ ವಿಭಜನೆಗಳಿಗೂ ಭಾರಿ ಅಂತರವಿದೆ.

ಮಿಲಿಯ ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ ವೇಗದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ

ಟ್ರಿಗರ್ (ಅಥವಾ ಫ್ಲಿಪ್-ಫ್ಲಾಪ್) ಸರ್ಕ್ಯುಟ್ ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಧನದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಇಲೆಕ್ಟ್ರಾನ್ ಟ್ಯೂಬ್‌ಗಳು ಇರುತ್ತವೆ (ಇಲೆಕ್ಟ್ರಾನ್ ಟ್ಯೂಬ್‌ಗಳ ಬದಲಾಗಿ

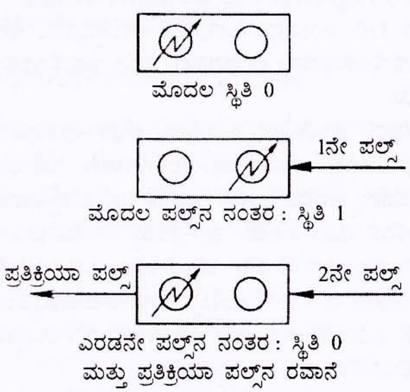
ಟ್ರಾನ್ಸಿಸ್ಟರ್‌ಗಳು ಅಥವಾ ಮುದ್ರಿತ ಚಿಪ್‌ಗಳು ಇರಬಹುದು). ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಟ್ಯೂಬಿನ ಮೂಲಕ ಮಾತ್ರ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗಲು ಸಾಧ್ಯ :

ಎಡಬದಿಯ ಅಥವಾ ಬಲಬದಿಯ ಟ್ಯೂಬಿನ ಮೂಲಕ. ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಸಂಪರ್ಕಗಳಿಗೆ ಕ್ಷಣಿಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಿಗ್ನಲ್ (ಪಲ್ಸ್) ಒಳತೂರಿಸಬಹುದು (ಇನ್‌ಪುಟ್) ಮತ್ತು ಇನ್ನೆರಡು ಸಂಪರ್ಕಗಳ ಮೂಲಕ ಮಂಡಲದ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ ಹೊರ ಹಾಯಿಸಬಹುದು (ಔಟ್‌ಪುಟ್). ಟ್ರಿಗರಿಗೆ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಿಗ್ನಲ್ ತೂರಿಸಿದಾಗ, ಅದು ಚಾಲೂ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆ ತನಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗುತ್ತಿದ್ದ ಟ್ಯೂಬಿನ ಸಂಪರ್ಕ ತಕ್ಷಣ ಕಡಿದು, ಇನ್ನೊಂದು ಟ್ಯೂಬಿನ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗುತ್ತದೆ. ಎಡಬದಿಯ ಟ್ಯೂಬಿನಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗುತ್ತಿರುವಾಗ ಹಾಗೂ ಬಲಬದಿಯ ಟ್ಯೂಬಿನಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗದಿರುವಾಗ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ ಸಿಗ್ನಲ್ ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಹಲವು ವಿದ್ಯುತ್ ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ಒಂದಾದ ಮೇಲೊಂದರಂತೆ ತೂರಿಸಿದಾಗ, ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಹೇಗೆ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತದೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ನ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಬಲಬದಿಯ ಟ್ಯೂಬಿನ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸೋಣ : ಬಲಬದಿಯ ಟ್ಯೂಬಿನ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗದಿರುವಾಗ, ಮಂಡಲವು "ಸ್ಥಿತಿ 0" ಯಲ್ಲಿದೆ ಎನ್ನೋಣ; ಅದರಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗುವಾಗ, ಮಂಡಲವು "ಸ್ಥಿತಿ 1" ರಲ್ಲಿದೆ ಎನ್ನೋಣ.

ಆರಂಭದಲ್ಲಿ, ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಸ್ಥಿತಿ "0" ಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಅಂದರೆ ಎಡಬದಿಯ ಟ್ಯೂಬಿನಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗುತ್ತಿದೆ (ಚಿತ್ರ 3).

ಮೊದಲನೆಯ ಪಲ್ಸ್‌ನ ಬಳಿಕ, ಬಲ ಬದಿಯ ಟ್ಯೂಬಿನ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಸ್ಥಿತಿ 1ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.



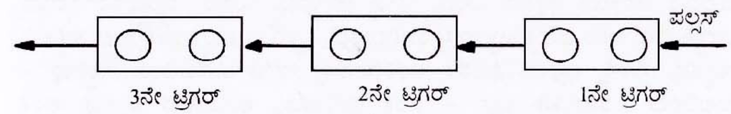
ಚಿತ್ರ 3

ಈ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ (Reaction) ಸಿಗ್ನಲ್ ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ; ಯಾಕೆಂದರೆ ಬಲಬದಿಯ ಟ್ಯೂಬ್ (ಎಡಬದಿಯದಲ್ಲ) ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗದಿರುವಾಗ ಮಾತ್ರ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ ಸಿಗ್ನಲ್ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಸಿಗ್ನಲಿನ ಬಳಿಕ, ಎಡಬದಿಯ ಟ್ಯೂಬಿನ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಪುನಃ ಸ್ಥಿತಿ 0 ಗೆ ಮರಳುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಒಂದು ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ ಸಿಗ್ನಲ್ (Reaction pulse) (ಪಲ್ಸ್) ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಈ ರೀತಿ ಎರಡು ಪಲ್ಸ್‌ಗಳ ಬಳಿಕ, ಮಂಡಲವು ಮೂಲಸ್ಥಿತಿಗೆ ಮರಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂರನೆಯ ಪಲ್ಸ್‌ನ ಬಳಿಕ (ಮೊದಲನೆಯ ಪಲ್ಸ್‌ನ ಬಳಿಕ ಆದಂತೆಯೇ) ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಸ್ಥಿತಿ 1 ರಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪಲ್ಸ್‌ನ ಬಳಿಕ ಮಂಡಲವು ಸ್ಥಿತಿ 0ಯಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. (ಎರಡನೆಯ ಸ್ಥಿತಿಯ ಬಳಿಕ ಇದ್ದಂತೆ) ಹಾಗೂ ಜೊತೆಯಲ್ಲೇ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ (Reaction) ಸಿಗ್ನಲ್ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಇಡೀ ಪ್ರಕಾರ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ. ಮಂಡಲದ ಸ್ಥಿತಿಯು ಎರಡೆರಡು ಪಲ್ಸ್‌ಗಳ ಬಳಿಕ ಪುನರಾವರ್ತಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಹಲವು ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆಯೆಂದೂ, ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ಮೊದಲ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ತೂರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆಂದೂ, ಮೊದಲ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ನ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗೆ ತೂರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆಂದೂ, ಎರಡನೆಯದರ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮೂರನೆಯದಕ್ಕೆ ತೂರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆಂದೂ, ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. (ಚಿತ್ರ 4ರಲ್ಲಿ ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳನ್ನು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ). ಇಂಥ ಟ್ರಿಗರ್ ಮಂಡಲಗಳ ಸರಣಿ ಯಾವ ರೀತಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತದೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 4

ಆರಂಭದಲ್ಲಿ, ಎಲ್ಲ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳೂ ಸ್ಥಿತಿ 0 ಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಐದು ಮಂಡಲಗಳ ಸರಣಿಯ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಯೋಜನೆ 00000. ಮೊದಲ (ಬಲ ತುದಿಯ) ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಸ್ಥಿತಿ 1ರಲ್ಲಿದೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ ಪಲ್ಸ್ ಇಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, ಇತರ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳೆಲ್ಲ ಸ್ಥಿತಿ '0' ಯಲ್ಲಿವೆ; ಈ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು 00001 ಸಂಯೋಜನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಎರಡನೆಯ ಸಿಗ್ನಲ್‌ನ ಬಳಿಕ, ಮೊದಲ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗದಿರುವ ಸ್ಥಿತಿಗೆ (ಸ್ಥಿತಿ '0') ಮರಳಿದರೂ, ಒಂದು ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ ಸಿಗ್ನಲ್ ನೀಡುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಈ ಸಿಗ್ನಲ್ ಎರಡನೆಯ ಟ್ರಿಗರ್‌ಅನ್ನು ಚಾಲೂ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇತರ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳೆಲ್ಲ ಸ್ಥಿತಿ '0'ಯಲ್ಲಿ ಉಳಿಯುವುದರಿಂದ, ಈಗ ಒದಗುವ ಸಂಯೋಜನೆ 00010. ಮೂರನೆಯ ಸಿಗ್ನಲ್‌ನ ಬಳಿಕ, ಮೊದಲ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಚಾಲೂ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಇತರ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳು ಮುಂಚಿನ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲೇ ಉಳಿಯುತ್ತವೆ. ಈಗ ಒದಗುವ ಸಂಯೋಜನೆ 00011. ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸಿಗ್ನಲ್‌ನ ಬಳಿಕ, ಮೊದಲ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಪುನಃ ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗದ ಸ್ಥಿತಿಗೆ ಮರಳಿ, ಒಂದು ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ ಸಿಗ್ನಲ್ ನೀಡುತ್ತದೆ; ಈ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ ಎರಡನೆಯ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಅನ್ನು ವಿದ್ಯುತ್ ಸಾಗದ ಸ್ಥಿತಿಗೆ ಮರಳಿಸಿ, ಒಂದು ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯನ್ನೂ ನೀಡುತ್ತದೆ; ಅಂತಿಮವಾಗಿ ಈ ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ ಸಿಗ್ನಲ್ ಮೂರನೆಯ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ನ್ನು ಚಾಲೂ ಮಾಡಿ, 00100 ಸಂಯೋಜನೆ ಒದಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಸರಣಿ ಒದಗುತ್ತದೆ :

1ನೆಯ ಸಿಗ್ನಲ್	–	ಸಂಯೋಜನೆ	00001
2ನೆಯ ಸಿಗ್ನಲ್	–	ಸಂಯೋಜನೆ	00010
3ನೆಯ ಸಿಗ್ನಲ್	–	ಸಂಯೋಜನೆ	00011
4ನೆಯ ಸಿಗ್ನಲ್	–	ಸಂಯೋಜನೆ	00100
5ನೆಯ ಸಿಗ್ನಲ್	–	ಸಂಯೋಜನೆ	00101
6ನೆಯ ಸಿಗ್ನಲ್	–	ಸಂಯೋಜನೆ	00110
7ನೆಯ ಸಿಗ್ನಲ್	–	ಸಂಯೋಜನೆ	00111
8ನೆಯ ಸಿಗ್ನಲ್	–	ಸಂಯೋಜನೆ	01000

ಇದರಿಂದ, ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳ ಸರಣಿ ಒಳತೂರುವ (Input) ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು, "ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುತ್ತದೆ" ಮತ್ತು ಅವನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗಳ ಹಾಗೂ 'ಒಂದು' ಗಳ ಜೋಡಣಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪದ್ಧತಿಯು ಪರಿಚಿತ ದಶಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿ ಅಲ್ಲ; ಇದು ದ್ವಿಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

ದ್ವಿಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ 'ಒಂದು'ಗಳು ಮತ್ತು ಸೊನ್ನೆಗಳಿಂದಲೇ ಬರೆಯಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಂಕಿಯ ಸ್ಥಾನವು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಅಂಕಿಯ ಸ್ಥಾನದ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಜಾಸ್ತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ದಶಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಅದು ಹತ್ತುಪಟ್ಟು ಜಾಸ್ತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬಲ ತುದಿಯ ಸ್ಥಾನವು ಸೊನ್ನೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನೂ ಇದರ ಎಡಬದಿಯ ಸ್ಥಾನವು – ಬಲದಿಂದ ಎರಡನೆಯ ಸ್ಥಾನ – ಅಂಕಿ ಎರಡನ್ನೂ, ಅನಂತರದ ಸ್ಥಾನವು ಅಂಕಿ ನಾಲ್ಕನ್ನೂ, ಇದರ ಎಡಬದಿಯದು ಎಂಟರ ಸ್ಥಾನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಸಂಖ್ಯೆ 19 = 16+2+1 ಇದನ್ನು ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 10011 ಎಂದು ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಕಾರ ಮೇಲೆ ವಿವರಿಸಿದ ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳ ಸರಣಿಯು ಒಳತೂರುವ (input) ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ, ಅವನ್ನು ದ್ವಿಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ದಾಖಲಿಸುತ್ತದೆ. ನಾವು ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಬಹುಮುಖ್ಯವಾದ ವಿಷಯ: ಒಂದು ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ನ್ನು ಚಾಲೂ ಮಾಡುವುದಕ್ಕೆ (ಅಂದರೆ, ಇನ್‌ಪುಟ್ ಪಲ್ಸ್ ದಾಖಲಿಸುವುದಕ್ಕೆ) ತಗಲುವ ಸಮಯ *ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನ ಕೆಲವು ನೂರು ಮಿಲಿಯಗಳಲ್ಲೊಂದು ಭಾಗ ಮಾತ್ರ!* ಆಧುನಿಕ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳು ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಮಿಲಿಯಗಟ್ಟಲೆ ಪಲ್ಸ್‌ಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಲ್ಲವು; ಇದು, ಯಾವುದೇ ಉಪಕರಣಗಳ ಸಹಾಯವಿಲ್ಲದೆ ಮಾನವ ಮಿದುಳು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವುದಕ್ಕಿಂತ ಮಿಲಿಯಗಟ್ಟಲೆ ಅಧಿಕ ವೇಗದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ: ಒಂದಾದ ಮೇಲೊಂದರಂತೆ ಬರುವ ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳಲ್ಲಿ $\frac{1}{10}$ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ವೇಗವಾಗಿ ಬರದಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಮಾನವರ ಕಣ್ಣುಗಳು ಅವನ್ನು ಗ್ರಹಿಸಬಲ್ಲವು.

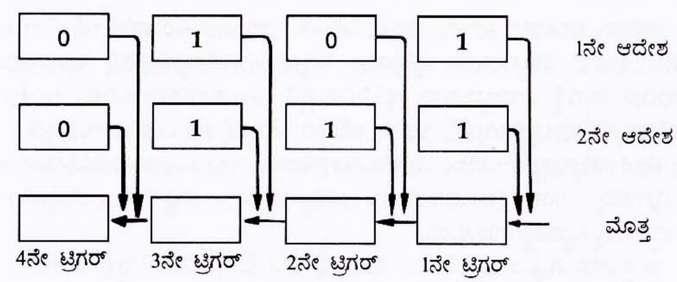
ಇಪ್ಪತ್ತು ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳ ಸರಣಿ ರಚಿಸಿದರೆ, ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ಇಪ್ಪತ್ತು ಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸಬಹುದು; ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಿಂದ

$2^{20}-1$ ವರೆಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದು: ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಮಿಲಿಯಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ. ಅರುವತ್ನಾಲ್ಕು ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಸರಣಿ ರಚಿಸಿದರೆ, ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಚದುರಂಗ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಮಿಲಿಯಗಟ್ಟಲೆ ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವು ಪ್ರಯೋಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ ಅಧ್ಯಯನಗಳಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಪರಮಾಣು ಭೌತ ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಮುಖ್ಯ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವಿಕಿರಣ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರಮಾಣು ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಹೊರ ಹಾರುವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಧದ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಕಣಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಹತ್ತು ಸಾವಿರ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು

ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಮೂಲಕ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದು ವಿಸ್ಮಯಕಾರಿ ವಿಷಯ. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕಲನವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 5

ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳ ಮೂರು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 5ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಮೇಲ್ತುದಿಯ ಸಾಲು ಮೊದಲನೆಯ ಪದ (ಅಥವಾ) ಆದೇಶವನ್ನೂ, ಎರಡನೆಯ ಸಾಲು ಎರಡನೆಯ ಪದವನ್ನೂ ದಾಖಲಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲು ಮೊತ್ತವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಈ ಸಾಧನವನ್ನು ಚಾಲೂ ಮಾಡಿದಾಗ, ಮೇಲಿನ ಮತ್ತು ಮಧ್ಯದ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿತಿ 1 ರಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳಿಂದ, ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲಿನ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳು ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತವೆ.

ಚಿತ್ರ 5ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ, ಮೊದಲೆರಡು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ 101 ಮತ್ತು 111 (ದ್ವಿಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯ) ಆದೇಶಗಳಿವೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಸಾಧನವು ಚಾಲೂ ಆದಾಗ, ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲಿನ ಮೊದಲ (ಬಲತುದಿಯ) ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಎರಡು ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ : ಇವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆದೇಶದ ಮೊದಲ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗಳಿಂದ ಬರುತ್ತವೆ. ಎರಡು ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ಪಡೆದಾಗ, ಮೊದಲ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಸ್ಥಿತಿ '0'ಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ; ಆದರೆ ಅದು ಎರಡನೆಯ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್‌ಗೆ ಒಂದು ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ (Reaction) ಸಿಗ್ನಲ್ ಕಳಿಸುತ್ತದೆ. ಜೊತೆಗೆ, ಎರಡನೆಯ (ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲಿನ) ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಎರಡನೆಯ ಆದೇಶದಿಂದ ಒಂದು ಸಿಗ್ನಲ್ ಪಡೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಎರಡನೆಯ ಸರ್ಕ್ಯೂಟ್ ಎರಡು ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರಿಂದ ಸ್ಥಿತಿ '0' ಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ ಸಿಗ್ನಲೊಂದನ್ನು

ಮೂರನೆಯ ಸರ್ಕ್ಯುಟ್‌ಗೆ ಕಳಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಿಗ್ನಲ್‌ನ ಜೊತೆಗೆ, ಮೂರನೆಯ ಸರ್ಕ್ಯುಟ್ ಇನ್ನೆರಡು ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ (ಪ್ರತಿ ಆದೇಶದಿಂದ ಒಂದೊಂದು). ಹೀಗೆ 3 ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ಪಡೆದಾಗ, ಮೂರನೆಯ ಸರ್ಕ್ಯುಟ್ ಸ್ಥಿತಿ '1' ಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ (Reaction) ಸಿಗ್ನಲೊಂದನ್ನು ಕಳಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ ಸಿಗ್ನಲ್, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಸರ್ಕ್ಯುಟ್‌ನ್ನು ಸ್ಥಿತಿ '1' ಕ್ಕೆ ತರುತ್ತದೆ (ನಾಲ್ಕನೆಯ ಮಂಡಲಕ್ಕೆ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸಿಗ್ನಲ್ ಕಳಿಸಲ್ಪಡುವುದಿಲ್ಲ). ಇದರಿಂದಾಗಿ, ಚಿತ್ರ 5ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಸಾಧನವು, ದ್ವಿಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಾಲಂಗಳ ಮೂಲಕ ಸಂಕಲಿಸಿದಂತಾಯಿತು.

$$\begin{array}{r}101\\+\ 111\\\hline 1100\end{array}$$

ಅಥವಾ, ದಶಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಸಂಕಲನದ ನಿರೂಪಣೆ : 5+7 = 12. ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲಿನ ಸರ್ಕ್ಯುಟ್‌ಗಳ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಾ ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಒಯ್ಯುವುದನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತವೆ: ಈ ಸಾಧನವು ಒಂದು ಅಂಕಿಯ ಸ್ಥಾನವನ್ನು "ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಂಡು", ಅದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ (ಕಾಲಂಗೆ) ಒಯ್ಯುತ್ತದೆ.

ಈ 4 ಸರ್ಕ್ಯುಟ್‌ಗಳ ಬದಲು 20 ಸರ್ಕ್ಯುಟ್‌ಗಳಿದ್ದರೆ, ನಾವು ಒಂದು ಮಿಲಿಯದವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಂಕಲನಮಾಡಬಹುದು. ಸರ್ಕ್ಯುಟ್‌ಗಳು ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆ, ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೃಹತ್ತಾಗಿಸಬಹುದು.

ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ ಒಂದು ಸಂಕಲನ ಸಾಧನವು ಚಿತ್ರ 5ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ್ದಕ್ಕಿಂತ ತೊಡಕಿನ ವಿದ್ಯುತ್ ಜಾಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಇಂಥ ಸಾಧನವು ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ನಿಧಾನಿಸುವ ವಿಶೇಷ ಸರ್ಕ್ಯುಟ್‌ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲಿನ ಮೊದಲ ಟ್ರಿಗರ್ ಸರ್ಕ್ಯುಟ್‌ಗೆ ಎರಡೂ ಆದೇಶಗಳಿಂದ ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳು ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ, ಸಾಧನವನ್ನು ಚಾಲೂ ಮಾಡಿದಾಕ್ಷಣ) ಬಂದರೆ, ಅವೆರಡೂ ಐಕ್ಯವಾಗಿ, ಒಂದೇ ಸಿಗ್ನಲಾಗಿ ಸ್ವೀಕರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಇದನ್ನು ತಪ್ಪಿಸಲು, ಆದೇಶಗಳ ಸಿಗ್ನಲ್‌ಗಳನ್ನು ನಿಧಾನಿಸಿ, ಅವು ಒಂದಾದ ಬಳಿಕ ಇನ್ನೊಂದು ಬರುವಂತೆ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಫ್ಲಿಪ್–ಫ್ಲಾಪ್ ಗಣಕದಲ್ಲಿ ಏಕೈಕ ಸಿಗ್ನಲನ್ನು ದಾಖಲಿಸಲು ತಗಲುವುದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಮಯ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಲು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಮಂಡಲಗಳ ಜೋಡಣೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಈ ಸಾಧನದಿಂದ ವ್ಯವಕಲನ ಮಾಡಿಸಬಹುದು. ಗುಣಾಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿಸಲೂ ಸಾಧ್ಯ (ಗುಣಾಕಾರವು ಸಂಕಲನದ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾದ್ದರಿಂದ, ಇದಕ್ಕೆ ಒಟ್ಟು ಸಂಕಲನಗಳಿಗೆ ತಗಲುವಷ್ಟು ಸಮಯ ಅವಶ್ಯ). ಇದೇ ರೀತಿ, ಭಾಗಾಕಾರ ಹಾಗೂ ಇತರ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಸಬಹುದು.

ಈ ಮುನ್ನ ವಿವರಿಸಿದ ಸಾಧನಗಳನ್ನು ಆಧುನಿಕ ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಸಾವಿರಗಟ್ಟಲೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಮಿಲಿಯಗಟ್ಟಲೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಲ್ಲವು ! ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಮಿಲಿಯಗಟ್ಟಲೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳು ಏಕೆಂದು ನೀವು ಕೇಳಬಹುದು. ಅವು ನಿಜಕ್ಕೂ ಅವಶ್ಯವೇ ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಗಣಕಯಂತ್ರಕ್ಕೆ 15–ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವರ್ಗಕ್ಕೇರಿಸಲು $\frac{1}{10000}$ ನೆಯ ಸೆಕೆಂಡ್ (ಅಥವಾ $\frac{1}{4}$ ಸೆಕೆಂಡ್) ಹೆಚ್ಚುವರಿ

ಸಮಯ ಬೇಕಾದರೆ, ಅದರಿಂದಾಗುವ ವ್ಯತ್ಯಯವೇನು ? ಪ್ರಾಯೋಗಿಕವಾಗಿ ಇವೆರಡೂ ಕ್ಷಣದೊಳಗಣ ಕ್ಷಿಪ್ರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲವೇ ?

ಈ ಬಗ್ಗೆ ಅವಸರದಿಂದ ತೀರ್ಮಾನಿಸಬೇಡಿ. ಸರಳ ಪ್ರಕರಣವೊಂದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಚದುರಂಗ ಪರಿಣತನೊಬ್ಬನು, ಹತ್ತಾರು, ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ನೂರಾರು, ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ ಬಳಿಕವಷ್ಟೇ ಒಂದು ಚಲನೆಗೆ ಮುಂದಾಗುತ್ತಾನೆ. ಒಂದು ವಿಧದ ನಡೆಯ ಪರಿಶೀಲನೆಗೆ ಹಲವು ಸೆಕೆಂಡುಗಳು ಬೇಕಾದರೆ, ನೂರಾರು ಸಂಭಾವ್ಯ ಚಲನೆಗಳ ಮಾನಸಿಕ ಪರಿಶೀಲನೆಗೆ ನಿಮಿಷಗಳೋ, ಹತ್ತಾರು ನಿಮಿಷಗಳೋ ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ತೀವ್ರ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಿರುವ ಆಟಗಳಲ್ಲಿ ಬಹುಪಾಲು ಸಮಯವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡುದರಿಂದ, ಚದುರಂಗದ ಆಟಗಾರರು ಸಮಯ ಕೊರತೆಗೆ ಒಳಗಾಗಿ, ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ವೇಗವಾಗಿ ಚಲನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಬಗೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಭಾವ್ಯ ಚಲನೆಯ ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡಲು ಗಣಕಯಂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ, ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಸಾವಿರಾರು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಗಣಕಯಂತ್ರಕ್ಕೆ, ಸಮಯದ ಕೊರತೆ ಉಂಟಾಗುವುದೇ ಇಲ್ಲ; ಎಲ್ಲ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಭವನೀಯತೆಗಳನ್ನೂ ಕ್ಷಣದೊಳಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

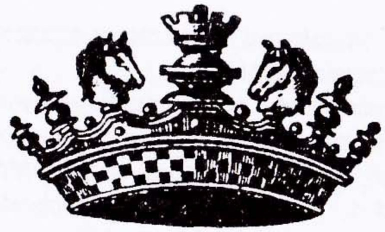
ಗಣಕಯಂತ್ರವು ತೊಡಕಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಲ್ಲದೆಂದು ನೀವೀಗ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಆದರೆ, ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಚದುರಂಗದಾಟವನ್ನು ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಆಡಬಲ್ಲದೆಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಾ ? ಈ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿವರಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ತಿಳಿಸಲಾಗುವುದು.

ಚದುರಂಗದಾಟಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ

ಚದುರಂಗದ ಹಾಸಿನಲ್ಲಿ ಆಡಬಹುದಾದ ಎಲ್ಲ ಬಗೆಯ ಚದುರಂಗದಾಟಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸೋಣ. ಇದರ ನಿಖರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವು ನಮ್ಮ ಅರಿವಿಗೆ ಮೀರಿದ ವಿಷಯ; ಆದರೂ, ಚದುರಂಗದಾಟಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಓದುಗರಿಗೆ ಪರಿಚಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಬೆಲ್ಜಿಯನ್ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಎಂ. ಕ್ರ್ಯಾಚಿಕ್ *ದ ಮೆಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಆಫ್ ಗೇಮ್ಸ್ ಆಂಡ್ ಮೆಥಮ್ಯಾಟಿಕಲ್ ಡೈವರ್‌ಶನ್ಸ್* ಎಂಬ ತನ್ನ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿದ್ದಾನೆ :

"ಮೊದಲ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ, ಬಿಳಿ ಕಾಯಿಗಳಿಗೆ 20 ಚಲನೆಗಳ ಆಯ್ಕೆಯಿದೆ (ಪದಾತಿಗಳು ಒಂದು ಅಥವಾ ಎರಡು ಚೌಕ ಚಲಿಸಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳ 16 ಚಲನೆಗಳು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕುದುರೆಗಳ ತಲಾ ಎರಡೆರಡು ಚಲನೆಗಳು). ಬಿಳಿಕಾಯಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಲನೆಗೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ ಕಪ್ಪು ಕಾಯಿಗಳು ಇವೇ 20 ಚಲನೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು. ಬಿಳಿಕಾಯಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಲನೆಯನ್ನು ಕಪ್ಪು ಕಾಯಿಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಲನೆಯೊಡನೆ ಹೊಂದಿಸಿದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆಟಗಾರನ ಮೊದಲ ಚಲನೆಯ ಬಳಿಕ, 20 x 20 = 400 ಬಗೆಯ ಆಟಗಳಿವೆ.

"ಮೊದಲ ಚಲನೆಯ ಬಳಿಕ, ಮಾಡಬಹುದಾದ ಹೊಸ ಚಲನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬಿಳಿಯ ಮೊದಲ ಚಲನೆಯು P – K4 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಬಳಿಕ ಮುಂದಿನ ಚಲನೆಗೆ 29 ಚಲನೆಗಳ ಆಯ್ಕೆಯಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಸಂಭವನೀಯ ಚಲನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಲೇ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, Q5ರಲ್ಲಿರುವ ಮಂತ್ರಿ, 27 ಚಲನೆಗಳನ್ನು



ಚಿತ್ರ 6

ಮಾಡಬಲ್ಲದು. (ಅದು ಚಲಿಸಬಹುದಾದ ಚೌಕಗಳೆಲ್ಲ ಖಾಲಿ ಇವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ). ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸರಳಗೊಳಿಸಲು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರಾಸರಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸೋಣ :

ಬಿಳಿ ಮತ್ತು ಕಪ್ಪು, ಇವೆರಡಕ್ಕೂ, ಮೊದಲ 5 ಚಲನೆಗಳಲ್ಲಿ
ಸರಾಸರಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಚಲನೆಗಳು 20;
ಬಿಳಿ ಮತ್ತು ಕಪ್ಪು, ಇವೆರಡಕ್ಕೂ, ತದನಂತರದ ಚಲನೆಗಳಲ್ಲಿ
ಸರಾಸರಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಚಲನೆಗಳು 30.

"ಇದಲ್ಲದೆ, ಪ್ರತಿ ಆಟದ ಸರಾಸರಿ ಚಲನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 40 ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ, ಅಂದಾಜಿನಂತೆ, ಚದುರಂಗದಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಆಟಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ :

$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35}\text{''}.$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಲ್ಪನೆಯು ನಮಗಾಗಲು, ಕೆಲವು ಸರಳೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ:

$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35} = 20^{10} \times 30^{70} = 2^{10} \times 3^{70} \times 10^{80}$$

ಈಗ, 2^{10} ಬದಲಾಗಿ ಅದಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಿರುವ 1000 ಅಥವಾ 10^3 ಬಳಸಿ ಮತ್ತು 3^{70}ನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ :

$$3^{70} = 3^{68} \times 3^2 \approx 10\,(3^4)^{17} \approx 10 \times 80^{17} = 10 \times 8^{17} \times 10^{17} = 2^{51} \times 10^{18}$$
$$= 2\,(2^{10})^5 \times 10^{18} \approx 2 \times 10^{15} \times 10^{18} = 2 \times 10^{33}.$$

ಈಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ :

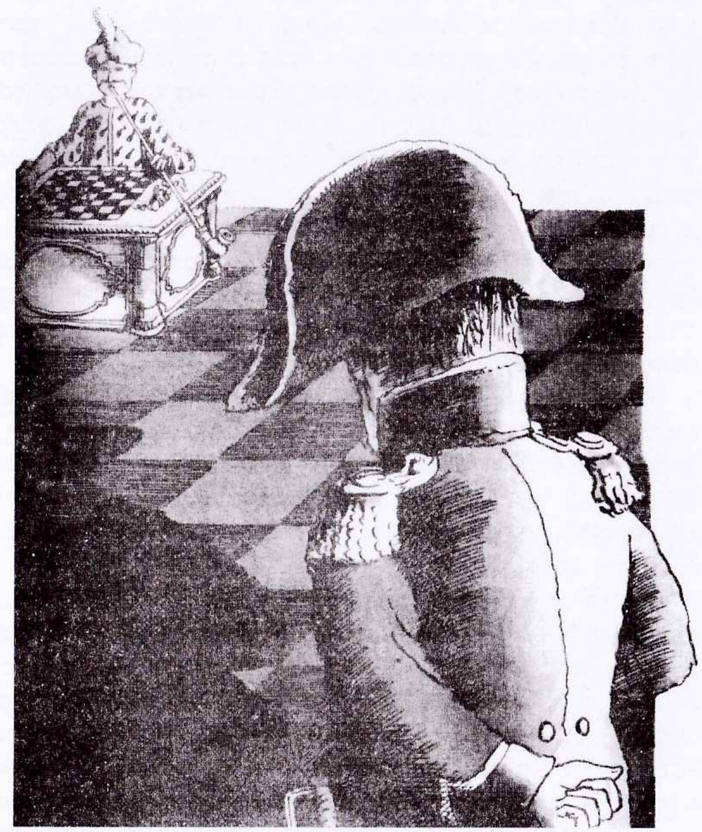
$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35} \approx 10^3 \times 2 \times 10^{33} \times 10^{80} = 2 \times 10^{116}.$$

ದಂತಕತೆಯ ಪ್ರಕಾರ, ಚದುರಂಗವನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿದ್ದಕ್ಕೆ ಪಾವತಿಯಾಗಿ ಕೇಳಿದ ಗೋಧಿ ಕಾಳುಗಳ ಅಗಾಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಕುಬ್ಜವಾಗಿಸುತ್ತದೆ (ಅದು ಕೇವಲ $2^{64} - 1 \approx 18.\ 10^{18}$ ಆಗಿತ್ತು). ಪ್ರಪಂಚದ ಜನರೆಲ್ಲರೂ ಎಡೆಬಿಡದೆ ಚದುರಂಗ ಆಡುತ್ತಾ, ಸೆಕೆಂಡಿಗೊಂದರಂತೆ ಕಾಯಿ ನಡೆಸಿದಾಗಲೂ ಈ ಚದುರಂಗದ ಮ್ಯಾರಥಾನ್‌ನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಪಂದ್ಯಗಳನ್ನೂ ಮುಗಿಸಲು 10^{100} ಶತಮಾನಗಳಿಗೆ ಕಡಿಮೆಯಿಲ್ಲದಷ್ಟು ಕಾಲಾವಧಿ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಚದುರಂಗ ಯಂತ್ರಗಳ ರಹಸ್ಯ

ಸ್ವಯಂಚಾಲಿತ ಚದುರಂಗ ಯಂತ್ರಗಳು ಈಗ ಕೆಲವು ವರ್ಷಗಳಿಂದ ಸುದ್ದಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದು ನಿಮಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗಲೂಬಹುದು. ಈ ವಾಸ್ತವಿಕಾಂಶವನ್ನು ಚದುರಂಗದ ಕಾಯಿಗಳ ಅಸಂಖ್ಯ ಸಂಯೋಜನೆಗಳೊಂದಿಗೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ ?

ಇದು ಬಹಳ ಸರಳ. ಚದುರಂಗ ಯಂತ್ರಗಳು ಇರಲೇ ಇಲ್ಲ. ಅವು ಕೇವಲ ಕಲ್ಪನೆಯ ಕೂಸುಗಳು. ಹಂಗೇರಿಯನ್ ಯಂತ್ರ ವಿಜ್ಞಾನಿ ವೂಲ್ಫ್‌ಗಾಂಗ್‌ವೊನ್ ಕೆಂಪೆಲೆನ್ (1734–1804) ರಚಿಸಿದ ಒಂದು ಯಂತ್ರ ಬಹಳ ಜನಪ್ರಿಯವಾಗಿತ್ತು; ಅವನು ತನ್ನ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಆಸ್ಟ್ರಿಯಾ ಮತ್ತು ರಷ್ಯಾದ ನ್ಯಾಯಾಲಯಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಿ, ಬಳಿಕ ಪ್ಯಾರಿಸ್ ಮತ್ತು ಲಂಡನ್‌ನಲ್ಲಿ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಪ್ರದರ್ಶನಕ್ಕಿಟ್ಟಿದ್ದ. ನೆಪೋಲಿಯನ್ I ಇದರೊಂದಿಗೆ ಚದುರಂಗದಾಟವಾಡಿದ; ಆತ ತಾನೊಂದು ಯಂತ್ರದ ಜೊತೆಗೇ ಆಡುತ್ತಿದ್ದೇನೆಂದು ವಿಶ್ವಾಸದಿಂದಿದ್ದ. ಕಳೆದ ಶತಮಾನದ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿ, ಈ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಸ್ವಯಂಚಾಲಿತ ಚದುರಂಗವಾಡುವ ಯಂತ್ರವನ್ನು ಅಮೇರಿಕಾಕ್ಕೆ ತಂದರು. ಅಲ್ಲಿ ಫಿಲಿಡೆಲ್ಫಿಯಾ ನಗರದಲ್ಲಿ ಅದು ಬೆಂಕಿ ಅನಾಹುತದಲ್ಲಿ ನಾಶವಾಯಿತು.



ಚಿತ್ರ 7

ಇತರ ಚದುರಂಗವಾಡುವ ಯಂತ್ರಗಳು ಇದರಂತೆ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಗಲಿಲ್ಲವಾದರೂ ಅಂತಹ ಯಂತ್ರಗಳು ನಿಜಕ್ಕೂ ಚದುರಂಗವಾಗಬಲ್ಲವು ಎಂಬ ನಂಬಿಕೆ ಉಳಿಯಿತು.

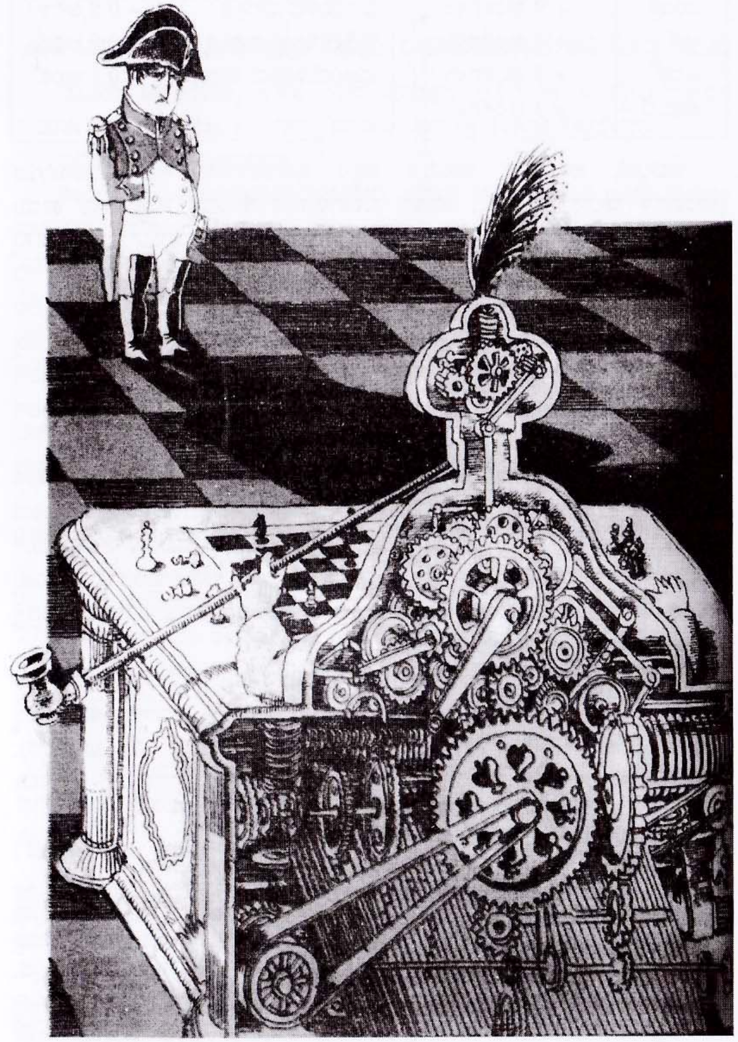
ವಾಸ್ತವಿಕವಾಗಿ, ಯಾವುದೇ ಚದುರಂಗವಾಡುವ ಯಂತ್ರವೂ ಸ್ವಯಂಚಾಲಿತವಾಗಿ ಆಟವಾಡಲಿಲ್ಲ. ಅವೆಲ್ಲದರಲ್ಲೂ ಚತುರ ಚದುರಂಗ ಪರಿಣತನೊಬ್ಬ ಯಂತ್ರದೊಳಗೆ ಕುಳಿತಿದ್ದು, ತಾನೇ ಸ್ವತಃ ಆಟಗಳನ್ನಾಡುತ್ತಿದ್ದ. ಕೆಂಪೆಲೆನ್‌ನ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಚದುರಂಗ ಯಂತ್ರವು ಕ್ಲಿಷ್ಟ ಯಂತ್ರ ಸಾಧನಗಳಿಂದ ತುಂಬಿದ್ದ ಭಾರಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿತ್ತು. ಈ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚದುರಂಗದ ಕಾಯಿಗಳ ಸಹಿತವಾದ ಚದುರಂಗದ ಹಾಸು ಇತ್ತು; ಈ ಕಾಯಿಗಳನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಗೊಂಬೆಯೊಂದರ ಕೈಯ ಮೂಲಕ ಚಲಿಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಆಟ ಆರಂಭವಾಗುವ ಮುನ್ನ, ವೀಕ್ಷಕರಲ್ಲಿ ಯಾರಾದರೊಬ್ಬ ಯಂತ್ರದೊಳಗೆ ನೋಡಿ, ಅಲ್ಲಿ ಯಾರೂ, ಅವಿತಿಲ್ಲವೆಂದು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ, ಅದರೊಳಗೆ ಸಣ್ಣ ಗಾತ್ರದ ಮನುಷ್ಯನೊಬ್ಬ ಅವಿತುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಕಷ್ಟು ಸ್ಥಳವಿತ್ತೆಂಬುದೇ ಇದರ ರಹಸ್ಯ ತಂತ್ರ. (ಯಂತ್ರದೊಳಗಿನ ಮಾನವರಾಗಿ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಚದುರಂಗ ಮಾಸ್ಟರ್‌ಗಳಾದ ಜೊಹಾನ್ನ್ ಅಲ್ಲ್ ಗೇಯಿರ್ ಮತ್ತು ವಿಲಿಯಂ ಲೂಯಿಸ್ ಪಾತ್ರವಹಿಸಿದ್ದರು). ಸಾರ್ವಜನಿಕರು ಯಂತ್ರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ಬಂದಾಗ, ಅವಿತಿದ್ದ ಆಟಗಾರನು ಭಾರಿ ಯಂತ್ರದ ಒಂದು ಭಾಗದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಿರಬಹುದು. ನಿಜ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, ಯಂತ್ರವು ಮಾನವ ಆಟಗಾರರನ್ನು ಅಡಗಿಸಲು ಬಳಸಲ್ಪಟ್ಟಿತೇ ಹೊರತು, ಆಟದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪಾತ್ರ ವಹಿಸಲಿಲ್ಲ.

ಇವೆಲ್ಲ ವಿವರಗಳನ್ನೋದಿ, ಚದುರಂಗದಾಟಗಳ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಾಗೂ ಅತ್ಯಂತ ಸೂಕ್ತ ಪಂದ್ಯಗಳನ್ನು ಸ್ವಯಂಚಾಲಿತವಾಗಿ ನಡೆಸಬಲ್ಲ ಯಂತ್ರಗಳು ಕನಸುಗಳಲ್ಲಷ್ಟೇ ಇರಬಲ್ಲವು ಎಂಬ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ನಾವು ಬರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಚದುರಂಗದಾಟದಲ್ಲಿ ಅಲ್ಲೋಲ ಕಲ್ಲೋಲವಾದೀತೆಂದು ಭಯಪಡಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಆದರೆ, ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಇತ್ತೀಚೆಗಿನ ಬೆಳವಣಿಗೆಗಳು ನಮ್ಮ ತೀರ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಬುಡಮೇಲು ಮಾಡಿವೆ. ಚದುರಂಗದಾಟವಾಡಲು ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳು ಈಗಾಗಲೇ ಇವೆ. ಇವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಹಲವು ಸಾವಿರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಲ್ಲ ಕ್ಲಿಷ್ಟಕರ ಗಣಕ ಯಂತ್ರಗಳು. ಇಂಥ ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ, ಗಣಕಯಂತ್ರವೊಂದು ಹೇಗೆ ಚದುರಂಗ ಆಡುತ್ತದೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಯಾವುದೇ ಗಣಕಯಂತ್ರವು, ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳ ಹೊರತಾಗಿ ಬೇರೇನನ್ನೂ ಮಾಡಲಾರದು – ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಯಂತ್ರವು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ಕ್ರಿಯಾ ಯೋಜನೆಯು ಮುಂಚಿತವಾಗಿ ಬರೆದ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ.

ಚದುರಂಗ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಅನ್ನು, ನಿಶ್ಚಿತ ವ್ಯೂಹ ತಂತ್ರಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ಗಣಿತಜ್ಞರು ರಚಿಸುತ್ತಾರೆ; ಆಟದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲೂ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಚಲನೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಸುವ ನಿಯಮಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ವ್ಯೂಹ ತಂತ್ರಗಳು ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ; ಈ ಚಲನೆಯು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವ್ಯೂಹ ಯೋಜನೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಚಲನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ನಿದರ್ಶನವೊಂದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಿದೆ. ಚದುರಂಗದ ಕಾಯಿಗಳಿಗೆ ನಿಶ್ಚಿತ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನೂ ನೀಡಲಾಗಿದೆ :



ಚಿತ್ರ 8

ರಾಜ	+ 200 ಅಂಕಗಳು	ಪದಾತಿ	+ 1 ಅಂಕ
ಮಂತ್ರಿ	+ 9 ಅಂಕಗಳು	ಹಿಂದುಳಿದ ಪದಾತಿ	– 0.5 ಅಂಕ
ಆನೆ	+ 5 ಅಂಕಗಳು	ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಪದಾತಿ	– 0.5 ಅಂಕ
ಒಂಟೆ	+ 3 ಅಂಕಗಳು	ಮುಂದೋಡಿದ ಪದಾತಿ	– 0.5 ಅಂಕ
ಕುದುರೆ	+ 3 ಅಂಕಗಳು		

ಇವಲ್ಲದೆ, ಆಟದಲ್ಲಿನ ಕಾಯ್ಗಳ ಸ್ಥಾನ ಬಲಾಬಲಗಳ ಅನುಕೂಲತೆಗಳಿಗೂ (ಕಾಯಿಗಳ ಚಲನ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯ, ಹಾಸಿನ ಬದಿಗಳಿಗಿಂತ ಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಹತ್ತಿರವಾದ ಕಾಯಿ ಜೋಡಣೆ ಇತ್ಯಾದಿ) ನಿಶ್ಚಿತ ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದ್ದು, ಇದನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆ ಹತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ, ಬಿಳಿ ಕಾಯಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳಿಂದ ಕರಿ ಕಾಯಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು, ಕರಿ ಕಾಯಿಗಳ ಮೇಲೆ ಬಿಳಿ ಕಾಯಿಗಳ ಸಂಖ್ಯಾ ಬಲದ ಹಾಗೂ ಸ್ಥಾನಬಲದ ಅನುಕೂಲತೆಗಳ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಚಿತ್ರಣವನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಧನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಬಿಳಿಕಾಯಿಗಳ ಸ್ಥಾನಬಲ ಕರಿಕಾಯಿಗಳಿಗಿಂತ ಉತ್ತಮ; ಇದು ಋಣವಾಗಿದ್ದರೆ, ಬಿಳಿಕಾಯಿಗಳ ಸ್ಥಾನಬಲ ಕರಿ ಕಾಯಿಗಳಿಗಿಂತ ದುರ್ಬಲ.

ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಚಲನೆಗಳಲ್ಲಿ ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಹೇಗೆ ಬದಲಾದೀತೆಂದು ಗಣಕ ಯಂತ್ರವು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ, ಮೂರು ಚಲನೆಗಳ ಎಲ್ಲ ಸಂಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾದ ಚಲನೆಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿ, "ಚಲನೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ" ಎಂದು ಮುದ್ರಿಸಿ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.* ಒಂದು ಚಲನೆಗೆ ಗಣಕ ಯಂತ್ರಕ್ಕೆ ತಗಲುವ ಸಮಯ ಅತ್ಯಲ್ಪ (ಪ್ರೋಗ್ರಾಂನ ವಿಧ ಮತ್ತು ಗಣಕಯಂತ್ರದ ವೇಗವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ). ಆದ್ದರಿಂದ ಚದುರಂಗವಾಡುವ ಗಣಕಯಂತ್ರಕ್ಕೆ ಸಮಯದ ಕೊರತೆ ಉಂಟಾಗುವುದೇ ಇಲ್ಲ.

ಕೇವಲ ಮೂರು ಮುಂಚಲನೆಗಳನ್ನು "ಯೋಚಿಸ"ಬಲ್ಲ ಯಂತ್ರವು ದುರ್ಬಲ "ಆಟಗಾರ" ಎಂಬುದೇನೋ ನಿಜ. (ಉತ್ತಮ ಚದುರಂಗ ಮಾಸ್ಟರ್‌ಗಳು ತಮ್ಮ ಸಂಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ 10 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಮುಂಚಲನೆಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುತ್ತಾರೆ). ಆದರೆ, ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಕ್ಷಿಪ್ರ ಪ್ರಗತಿ ಆಗುತ್ತಿದ್ದು, ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲೆ ಉತ್ತಮ ಗಣಕಯಂತ್ರ–ಆಟಗಾರರನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

ಗಣಕಯಂತ್ರ–ಚದುರಂಗದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾದ ಹಲವು ವಿಷಯಗಳಿವೆ ;

* ಇತರ ಚದುರಂಗ ತಂತ್ರಾಂಶಗಳೂ ಇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಎದುರಾಳಿಯ ಪ್ರತಿ–ಚಲನೆಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಹೊಂದಿರಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ; ಪ್ರೋಗ್ರಾಂನಲ್ಲಿ ಎದುರಾಳಿಯ ಪ್ರಬಲ ಚಲನೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರಬಹುದು; ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಚೆಕ್, ಕಾಯಿನಾಶ, ಧಾಳಿ, ರಕ್ಷಣೆ ಇತ್ಯಾದಿ. ಅದಲ್ಲದೆ, ಎದುರಾಳಿಯ ಕೆಲವು ಅತಿ ಪ್ರಬಲ ಚಲನೆಗಳಿಗೆ ಪ್ರತಿಯಾಗಿ, ತಂತ್ರಾಂಶ ಮೂರಕ್ಕಿಂತಲೂ ಹೆಚ್ಚು ಮುಂಚಲನೆಗಳ ಸಂಯೋಜನೆ ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಚದುರಂಗದ ಕಾಯಿಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ಅಂಕಗಳ ಮಾನದಂಡವೂ ಇರಬಹುದು. ಗಣಕ ಯಂತ್ರವು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ವ್ಯೂಹತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ, ಅದು ಆಟವಾಡುವ ರೀತಿಯೂ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗಾಗಲೇ 2011ರಲ್ಲಿ ಈ ಬಗೆಯ ತಂತ್ರಾಂಶವು ವಿಕಸಿತವಾಗಿದೆ. ತಾ. ಕಾಸ್ಪರೋವ್‌ರವರನ್ನು ಯಂತ್ರವು ಸೋಲಿಸಿತು.

ಆದರೆ ಅವೆಲ್ಲ ಇಂತಹ ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಮುಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಗಣಕಯಂತ್ರ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಅಂಕಿ ಎರಡನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಬರೆದು ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ

ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಓದುಗರಿಗೆ ಬಹುಶಃ ತಿಳಿದಿರಬಹುದು. ಒಂಭತ್ತನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ :

ಇದು 9ರ 9^{9^9} "ಮಹಾಘಾತ".

ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಅಗಾಧವಾದುದೆಂದರೆ, ಯಾವ ಹೋಲಿಕೆಯೂ ಇದರ ಪ್ರಚಂಡ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಲು ನೆರವಾಗದು. ಈ ಬೃಹತ್ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎದುರು ವಿಶ್ವದ ಒಟ್ಟು ಇಲೆಕ್ಟ್ರಾನುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಕುಬ್ಜವೆನಿಸುತ್ತದೆ. 'ಮೋಜಿನ ಗಣಿತ' ಎಂಬ ನನ್ನ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಈ ದೈತ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದನ್ನು ಪುನಃ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಲು ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ, ಈಗ ಅದೇ ರೀತಿಯ ಬೇರೆಯಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಸೂಚಿಸಬಯಸುತ್ತೇನೆ.

ಎರಡನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಬರೆದು (ಯಾವುದೇ ಗಣಿತ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸದೆ) ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಉತ್ತರ :

ಒಂಭತ್ತರ ಮೂರು–ಮಹಡಿ ಜೋಡಣೆಯ ತಾಜಾ ನೆನಪಿನಲ್ಲಿ, ನೀವು ತರಾತುರಿಯಿಂದ ಎರಡನ್ನೂ ಅದೇ ರೀತಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು:

2^{2^2}.

ಆದರೆ ಈಗ ಇದರ ಫಲಿತಾಂಶ ತೀರ ಭಿನ್ನ. ಇದು ಬಹಳ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು 222ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಸಣ್ಣದು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 2^4 ಅಥವಾ 16.

ಈ ಪ್ರಕಾರ ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ 222 ಅಲ್ಲ; 22^2 (ಅಥವಾ 484) ಕೂಡ ಅಲ್ಲ. ಅದು:

$$2^{22} = 4\ 194\ 304.$$

ಈ ಉದಾಹರಣೆ ಬಹಳ ಬೋಧನಾಪ್ರದವಾಗಿದೆ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ ವಿನ್ಯಾಸದ ಆಧಾರದಿಂದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವುದು ಜಾಣತನವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಇದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ಮೂರು ಬಾರಿ ಮೂರು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಈ ಮುಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ನೀವು ಹೆಚ್ಚು ಜಾಗರೂಕರಾಗಬಹುದು : ಮೂರನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಬರೆದು (ಯಾವುದೇ ಗಣಿತ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸದೆ) ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಉತ್ತರ :

ಇಲ್ಲೂ ಮೂರರ ಮೂರು–ಮಹಡಿ ಜೋಡಣತಿ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಫಲಿತಾಂಶ ನೀಡುವುದಿಲ್ಲ. ಕಾರಣ

3^{3^3} ಅಂದರೆ 3^{27}, ಇದು 3^{33}ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ, ಆದ್ದರಿಂದ, 3^{33} ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ.

ಮೂರು ಬಾರಿ ನಾಲ್ಕು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ನಾಲ್ಕನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಬರೆದು (ಯಾವುದೇ ಗಣಿತ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸದೆ) ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಉತ್ತರ :

ಈ ಮುಂಚಿನ ಎರಡು ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ.

$$4^{44},$$

ಇದು ತಪ್ಪು, ಯಾಕೆಂದರೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ ನಾಲ್ಕರ ಮೂರು-ಮಹಡಿ ಜೋಡಣೆ:

$$4^{4^4},$$

ಇದು ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ. ಯಾಕೆಂದರೆ $4^4 = 256$. ಈ ಪ್ರಕಾರ 4^{256} ಎಂಬುದು 4^{44} ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದು.

ಮೂರು ತದ್ರೂಪಿ ಅಂಕಿಗಳು

ಕೆಲವು ಅಂಕಿಗಳ ಮಹಡಿ ಜೋಡಣೆ ಬೃಹತ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಅಂಕಿಗಳ ಅಂತಹ ಜೋಡಣೆ ಕುಬ್ಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವ ಈ ಗೊಂದಲ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇಂಥ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಯಾವುದೇ ಗಣಿತ ಚಿಹ್ನೆ ಬಳಸದೆ, ಒಂದೇ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಬರೆದಾಗ ದೊರಕುವ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ ಅಂಕೆ a ಎಂದಿರಲಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಜೋಡಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

$$2^{22},\ 3^{33},\ 4^{44}$$

ಇದಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಸಂಕೇತ ರೂಪ:

$$a^{10a+a} \text{ ಅಥವಾ } a^{11a}.$$

ಈಗ, ಮೂರು-ಮಹಡಿ ಜೋಡಣೆ ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ :

$$a^{a^a}.$$

aಯ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ, ಎರಡನೆಯ ಜೋಡಣೆಯು ಮೊದಲನೆಯ ಜೋಡಣೆಗಿಂತ ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೃಜಿಸುತ್ತದೆಂದು ಪತ್ತೆಮಾಡೋಣ. ಇವೆರಡೂ ಸಂಕೇತರೂಪಗಳು, ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಘಾತಗಳಾದುದರಿಂದ, ಭಾರಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಈಗ, 11aಗಿಂತ aa ಯಾವಾಗ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು :

$$a^a > 11a\ ?$$

ಈ ಅಸಮಾನತೆಯ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು a ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$a^{a-1} > 11.$$

a ಎಂಬುದು 3ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ a^{a-1} ಎಂಬುದು 11ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ :

$$4^{4-1} > 11,$$

ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಘಾತಸಂಖ್ಯೆಗಳು 11ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿವೆ :

$$3^2 \text{ ಮತ್ತು } 2^1$$

ಈ ಮೊದಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ ನಾವು ಎಡವಿದುದು ಏಕೆಂಬುದು ಈಗ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ : ಒಂದು ರೀತಿಯ ವಿನ್ಯಾಸವು ಎರಡು ಮತ್ತು ಮೂರಕ್ಕೆ ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾದರೆ, ನಾಲ್ಕು ಮತ್ತು ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಯ ವಿನ್ಯಾಸವು ಅತ್ಯುತ್ತಮ.

ಒಂದನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಬರೆದು ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಒಂದನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಬರೆದು ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ? (ಗಣಿತ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಬಾರದು).

ಉತ್ತರ :

ತಕ್ಷಣವೇ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಮೂಡುವ 1111 ಎಂಬುದು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಹಲವು ಪಟ್ಟು ಸಣ್ಣದು :

$$11^{11}.$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗುಣಿಸಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ತಾಳ್ಮೆ ಯಾರಿಗೂ ಇರಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬಹಳ ವೇಗವಾಗಿ ಪತ್ತೆಮಾಡಬಹುದು.

ಇದು 285 ಸಾವಿರ ಮಿಲಿಯಗಳಿಗಿಂತ ಅಧಿಕ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು 1111ಕ್ಕಿಂತ ಸುಮಾರು 25 ಮಿಲಿಯ ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ.

ಎರಡನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಬರೆದು ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ, ಎರಡನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಬರೆದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಎರಡನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಬಾರಿ ಯಾವ ರೀತಿ ಬರೆದರೆ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರಕುತ್ತದೆ ?

ಉತ್ತರ :

ಈ ರೀತಿಯ ಒಟ್ಟು ಎಂಟು ಸಂಯೋಜನೆಗಳಿವೆ :

$$2222,\quad 222^2,\quad 22^{22},\quad 2^{222}.$$

$$22^{2^2},\quad 2^{22^2},\quad 2^{2^{22}},\quad 2^{2^{2^2}}.$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಮೇಲಿನ ಸಾಲನ್ನು ಮೊದಲು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎರಡು-ಮಹಡಿ ಜೋಡಣೆಗಳು.

ಮೊದಲನೆಯದು, 2222, ಉಳಿದೆಲ್ಲದಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಮುಂದಿನ ಎರಡು

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು, 222^2 ಮತ್ತು 22^{22}ನ್ನು, ಹೋಲಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ, ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಿರಿ :

$$22^{22} = 22^{2\times 11} = (22^2)^{11} = (484)^{11}.$$

ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 222^2ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ. ಏಕೆಂದರೆ, $(484)^{11}$ ರ ವರ್ಗಮೂಲ ಮತ್ತು ಘಾತಸೂಚಕ ಇವೆರಡೂ 222^2 ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ.

$$\left(\begin{array}{l}\text{ಅಂದರೆ } 484 > 222 \\ \qquad\quad 11 > \;\;2\end{array}\right)$$

ಈಗ, ಮೊದಲ ಸಾಲಿನ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ 2^{222} ಜೊತೆ 22^{22}ನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ, 22^{22}ರ ಬದಲಾಗಿ, ಅದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ 32^{22} ಬರೆದು, ಇದು ಕೂಡ 2^{222} ಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದೆಂದು ತೋರಿಸೋಣ :

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110}$$

ಇದರಂತೆ, 32^{22} ಎಂಬುದು 2^{222} ಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದು (ಯಾಕೆಂದರೆ ಘಾತಸೂಚಕ ಸಣ್ಣದು).

ಈ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯ ಪ್ರಕಾರ, ಮೇಲಿನ ಸಾಲಿನ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ : 2^{222}.

ಈಗ, ಈ ಐದೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರಾಯಿತು : 2^{222} ಮತ್ತು ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು:

$$22^{2^2},\quad 2^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}.$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2^{16} ಕ್ಕೆ ಸಮ, ಹಾಗಾಗಿ ಇದು ಈ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಯಲಾಗದಷ್ಟು ಸಣ್ಣದು; ಈ ಸಾಲಿನ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ 22^4 ಕ್ಕೆ ಸಮ, ಇದು 32^4 ಅಥವಾ 2^{20} ಕ್ಕಿಂತ ಸಣ್ಣದು. ಈ ಸಾಲಿನ ಎರಡನೆಯ ಹಾಗೂ ಮೂರನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ಇದು ಸಣ್ಣದು. ಈಗ ಉಳಿದ ಕೇವಲ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇವೆಲ್ಲವೂ 2ರ ಘಾತಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತಸೂಚಕ ಹೊಂದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಈಗ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಘಾತಸೂಚಕಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯದು ಅತ್ಯಧಿಕ ಎಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ :

$$222,\ 484 \text{ ಮತ್ತು } 2^{20+2}\ (= 2^{10\times 2} \times 2^2 \approx 10^6 \times 4)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡನ್ನು 4 ಬಾರಿ ಬರೆದು ರಚಿಸಬಹುದಾದ ಅತಿದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ

$$2^{2^{22}}.$$

ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಬಳಸದೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಗಾಧತೆಯ ಸ್ಥೂಲ ಚಿತ್ರಣ ಪಡೆಯಲು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂದಾಜು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಳಸೋಣ.

$$2^{10} \approx 1000.$$

ಈಗ,

$$2^{22} = 2^{20} \times 2^2 \approx 4 \times 10^6,$$
$$2^{2^{22}} = 2^{4\ 000\ 000} > 10^{1\ 200\ 000}.$$

ಇದರಿಂದ, ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮಿಲಿಯಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಅಂಕಿಗಳಿವೆ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ■

ಅಧ್ಯಾಯ – ಎರಡು

ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆ

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಕಲೆ

ಸಮೀಕರಣಗಳು ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಂತಿವೆ. ಖ್ಯಾತ ವಿಜ್ಞಾನಿ ನ್ಯೂಟನ್ *ಅರ್ತ್‌ಮಿಟಿಕಾ ಯೂನಿವರ್ಸಾಲಿಸ್ (ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಅಂಕಗಣಿತ)* ಎಂಬ ತನ್ನ ಬೀಜಗಣಿತದ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆದಿದ್ದಾನೆ : "ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಥವಾ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತಗಳ ನಡುವಣ ಅಮೂರ್ತ ಸಂಬಂಧ – ಇವುಗಳ ಕುರಿತಾದ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಯಾರಾದರೂ ಬಿಡಿಸಬೇಕಾದರೆ ಆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ತನ್ನ ಆಡು ಭಾಷೆಯಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಗೆ ಅನುವಾದಿಸಿದರಾಯಿತು."

ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಷೆಯಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಗೆ ನ್ಯೂಟನ್ ಅನುವಾದಿಸಿದ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ :

ಸಾಮಾನ್ಯ ನುಡಿಯಲ್ಲಿ	ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ
ಒಬ್ಬ ವರ್ತಕನ ಬಳಿ ನಿಶ್ಚಿತ ಮೊತ್ತದ ಹಣವಿದೆ.	x
ಮೊದಲ ವರ್ಷ ಅವನು 100 ಪೌಂಡ್* ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದ.	$x-100$
ಉಳಿದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಅದರ $1/3$ ಭಾಗವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದ.	$(x-100)+\dfrac{x-100}{3} = \dfrac{4x-400}{3}$
ಎರಡನೆಯ ವರ್ಷ ಪುನಃ 100 ಪೌಂಡ್ ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದ.	$\dfrac{4x-400}{3}-100=\dfrac{4x-700}{3}$
ಉಳಿದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಅದರ $1/3$ ಭಾಗವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದ.	$\dfrac{4x-700}{3}+\dfrac{4x-700}{9}=\dfrac{16x-2800}{9}$

* ಗ್ರೇಟ್ ಬ್ರಿಟನ್‌ನಲ್ಲಿ ಚಲಾವಣೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹಣವನ್ನು ಪೌಂಡ್ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯ ನುಡಿಯಲ್ಲಿ	ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ
ಮೂರನೆಯ ವರ್ಷ ಪುನಃ 100 ಪೌಂಡ್ ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದ.	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$
ಉಳಿದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಅದರ $^1/_3$ ಭಾಗವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದ.	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$
ಈ ಮೊತ್ತವು ಅವನ ಮೂಲ ಬಂಡವಾಳದ ಎರಡರಷ್ಟಿದೆ.	$\frac{64x-14800}{27}=2x$

ವರ್ತಕನು ಹೊಂದಿದ್ದ ಮೂಲ ಬಂಡವಾಳವು ಎಷ್ಟೆಂದು ತಿಳಿಯಲು ಕೊನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರಾಯಿತು.

ಈ ಬಗೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು. ಆದರೆ, ದತ್ತಾಂಶಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ನಿಜವಾಗಿಯೂ ಕಷ್ಟದ ಕೆಲಸ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಷೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಗೆ ಅನುವಾದಿಸುವುದೇ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಕಲೆ ಎಂದು ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತಾಗಿದೆ. ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಕೆಲವೇ ಪದಗಳಿವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಆಡು ಭಾಷೆಯ ಪದ ಸಮುಚ್ಚಯಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಗೆ ಅನುವಾದಿಸುವುದು ಬಹಳ ಕಷ್ಟ. ಈ ಮುಂದೆ ವಿವರಿಸಿದ ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿರುವ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರೆ, ಇದು ಎಷ್ಟು ಕಷ್ಟದ ಕೆಲಸವೆಂಬುದು ಓದುಗರಿಗೆ ಅರಿವಾಗುತ್ತದೆ. (ಸರಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿನ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಘಾತಾಂಕವು 'ಒಂದು' ಆಗಿರುತ್ತದೆ).

ಡಯೊಫಾಂಟಸ್‌ನ ಜೀವಿತಾವಧಿ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದ ಪ್ರಕಾಂಡ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ ಡಯೊಫಾಂಟಸ್‌ನ ಜೀವನ ವಿವರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವುದು ತೀರಾ ಕಡಿಮೆ. ಅವನ ಸಮಾಧಿ ಶಿಲೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಯ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಬರಹದಿಂದ ಮಾತ್ರ ಅವನ ಬಗ್ಗೆ ತುಸು ಮಾಹಿತಿ ದೊರಕಿದೆ.

ಆ ಸಮಸ್ಯೆ ಹೀಗಿದೆ :

ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ	ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ
ಪಯಣಿಗಾ ! ಇಲ್ಲಿ ಡಯೊಫಾಂಟಸ್‌ನ ಅಸ್ತಿ ಸಂಚಯನಗೊಂಡಿದೆ. ಅವನ ಜೀವಿತಾವಧಿಯನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದೆನ್ನುವುದು ಒಂದು ಮೋಜಿಗ.	x
ಆ ಅವಧಿಯ $^1/_6$ ಭಾಗ ಸುಂದರ ಬಾಲ್ಯ	$\frac{x}{6}$
ಅವನ ಜೀವನದ $^1/_{12}$ ಭಾಗ ದಾಟಿದಾಗ ಮದುವೆಯಾದ	$\frac{x}{12}$
ಜೀವಿತದ $^1/_7$ ಅವಧಿ ವಿವಾಹಿತನಾಗಿದ್ದರೂ ಮಕ್ಕಳಿಲ್ಲದೆ ಕಳೆದ	$\frac{x}{7}$
ಇದಾದ ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ಅವನಿಗೆ ಪುತ್ರೋತ್ಸವದ ಆನಂದ	5
ಆ ಪುತ್ರನಿಗೋ ಅವನ ತಂದೆಯ ಆಯುಷ್ಯದ ಅರ್ಧ ಅವಧಿಯ ಜೀವನ ಮಾತ್ರ ವಿಧಿ ನೀಡಿತು.	$\frac{x}{2}$
ದುಃಖಿತಪ್ತನಾದ ಈ ವೃದ್ಧ ಪುತ್ರವಿಯೋಗದ ನಾಲ್ಕು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ತನ್ನ ಕೊನೆಯುಸಿರೆಳೆದ.	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$

ಹಾಗಾದರೆ ಸಾಯುವ ಮೊದಲು ಡಯೋಫಾಂಟಸ್ ಎಷ್ಟು ವರ್ಷಕಾಲ ಬದುಕಿದ್ದ ?

ಉತ್ತರ :

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $x = 84$ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆತ 21ನೆಯ ವಯಸ್ಸಿಗೆ ಮದುವೆಯಾದ ಮತ್ತು 38ನೆಯ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ತಂದೆಯಾದ. ಅವನಿಗೆ 80 ವರುಷಗಳಾದಾಗ ಮಗನನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡ. 84ನೆಯ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ತೀರಿಕೊಂಡ.

ಕುದುರೆ ಮತ್ತು ಕತ್ತೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಆಡು ಭಾಷೆಯಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಂಕೇತಗಳಿಗೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಅನುವಾದವಾಗಬಲ್ಲ ಹಳೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದು ಹೀಗಿದೆ :

"ಭಾರವಾದ ಹೊರೆ ಹೊತ್ತ ಒಂದು ಕುದುರೆ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಕತ್ತೆ – ಇವೆರಡೂ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದವು. ಭಾರ ಹೆಚ್ಚಾಯಿತೆಂದು ಕುದುರೆ ಗೊಣಗಿತು. ಆಗ ಕತ್ತೆಯು "ಏನದು ಗೊಣಗುತ್ತೀ ? ನಿನ್ನ ಬೆನ್ನಿಂದ ಒಂದು ಚೀಲವನ್ನು ತೆಗೆದು ನಾನು ಹೊತ್ತರೆ ಆಗ ನನ್ನ ಹೊರೆ ನಿನ್ನದಕ್ಕಿಂತಲೂ ದುಪ್ಪಟ್ಟಾಗುವುದು. ಆದರೆ ನೀನು ನನ್ನಿಂದ ಒಂದು ಚೀಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಆಗ ನಮ್ಮಿಬ್ಬರ ಹೊರೆಗಳು ಸಮನಾಗುವುವು" ಎಂದಿತು.

"ಜಾಣರೇ, ಕುದುರೆ ಎಷ್ಟು ಚೀಲ ಹೊತ್ತಿತ್ತು ಹಾಗೂ ಕತ್ತೆ ಎಷ್ಟು ಚೀಲ ಹೊತ್ತಿತ್ತು ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ಹೇಳಬೇಕು, ಸಾಧ್ಯವೇ ?"

ಉತ್ತರ :

ನಾನೊಂದು ಚೀಲ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ	$x-1$
ನನ್ನ ಹೊರೆ	$y+1$
ನಿನ್ನದರ ಎರಡು ಪಟ್ಟಾಗುವುದು	$y+1=2(x-1)$
ಆದರೆ ನನ್ನಿಂದ ನೀನೊಂದು ಚೀಲ ಪಡೆದರೆ	$y-1$
ನಿನ್ನ ಹೊರೆ	$x+1$
ನನ್ನದರಷ್ಟೇ ಆಗುವುದು	$y-1=x+1$

ನಾವೀಗ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಅಪರಿಚಿತ ಮೌಲ್ಯಗಳಿರುವ (x, y) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದ್ದೇವೆ.

$$\left.\begin{array}{l} y+1=2(x-1) \\ y-1=x+1 \end{array}\right\} \text{ ಅಥವಾ } \left\{\begin{array}{l} 2x-y=3 \\ y-x=2. \end{array}\right.$$

ಇವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರಗಳು $x = 5$ ಹಾಗೂ $y = 7$. ಕುದುರೆಯು 5 ಚೀಲಗಳನ್ನೂ, ಕತ್ತೆಯು 7 ಚೀಲಗಳನ್ನೂ ಹೊತ್ತಿದ್ದವು.

ನಾಲ್ವರು ಸೋದರರು

ಸಮಸ್ಯೆ:

ನಾಲ್ವರು ಸೋದರರ ಬಳಿ ಒಟ್ಟು 45 ರೂಪಾಯಿಗಳಿವೆ. ಅವರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಹೊಂದಿರುವ ಮೊಬಲಗು ಸಮಾನವಾಗಲು ಈ ರೀತಿ ಮಾಡಬೇಕು: ಮೊದಲಿನವನ ಪಾಲಿಗೆ 2 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಎರಡನೆಯವನ ಪಾಲಿನಿಂದ 2 ರೂ. ಗಳನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು. ಮೂರನೆಯವನ ಪಾಲನ್ನು 2 ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಬೇಕು. ನಾಲ್ಕನೆಯವನ ಪಾಲನ್ನು ಅರ್ಧಭಾಗ ಮಾಡಬೇಕು. ಹಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಈಗ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನ ಬಳಿಯೂ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ರೂಪಾಯಿಗಳಿವೆ ?

ಉತ್ತರ :

ನಾಲ್ವರು ಸೋದರರ ಬಳಿ ಒಟ್ಟು 45 ರೂಪಾಯಿಗಳಿವೆ	$x+y+z+t = 45$
ಮೊದಲಿನವನಿಗೆ 2 ರೂ. ಕೊಟ್ಟರೆ	$x+2$
ಎರಡನೆಯವನಿಂದ 2 ರೂ. ತೆಗೆದರೆ	$y-2$
ಮೂರನೆಯವನ ಪಾಲನ್ನು ಇಮ್ಮಡಿ ಮಾಡಿದರೆ	$2z$
ನಾಲ್ಕನೆಯವನ ಪಾಲನ್ನು ಅರ್ಧ ಮಾಡಿದರೆ	$\frac{t}{2}$
ಎಲ್ಲರ ಬಳಿಯೂ ಒಂದೇ ಮೊತ್ತದ ಹಣವಿರುವುದು.	$x+2=y-2=2z=\frac{t}{2}$

ಈಗ ನಾವು ಕೊನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನಾಗಿ ಬಿಡಿಸಿ ಬರೆಯೋಣ :

$$x+2 = y-2,$$
$$x+2 = 2z,$$
$$x+2 = \frac{t}{2},$$

ಈಗ ನಮಗೆ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತವೆ.

$$y = x+4,$$
$$z = \frac{x+2}{2},$$
$$t = 2x+4.$$

ಈ ಮೂರು ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣವು ಹೀಗಿದೆ :

$$x+x+4+\frac{x+2}{2}+2x+4=45.$$

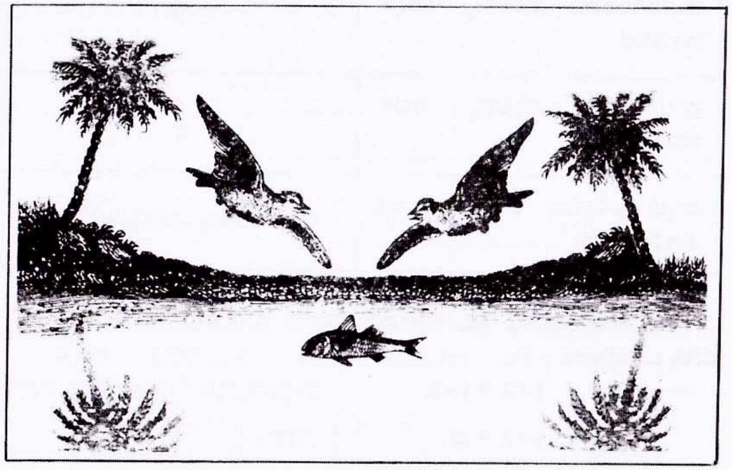
ಆದ್ದರಿಂದ $x = 8$. ಈಗ $y = 12$, $z = 5$ ಹಾಗೂ $t = 20$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ ನಾಲ್ವರು ಸೋದರರು ಹೊಂದಿರುವ ಮೊಬಲಗು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8, 12, 5 ಮತ್ತು 20 ರೂಪಾಯಿಗಳು.

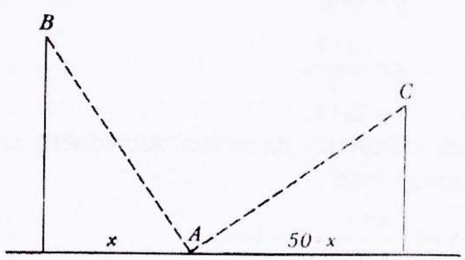
ನದಿಯ ಬದಿಯ ಎರಡು ಹಕ್ಕಿಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಅರಬ್ ದೇಶದ 11ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಅಲಾಖ್ವಾರಿಜ್ಮಿ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಹೀಗಿದೆ :

ಒಂದು ನದಿಯ ದಡಗಳಲ್ಲಿ ಎದುರು ಬದುರಾಗಿ ಎರಡು ತಾಳೆ ಮರಗಳಿವೆ. ಒಂದು ಮರದ ಎತ್ತರ 30 ಮೊಳಗಳಾದರೆ ಇನ್ನೊಂದರದ್ದು 20 ಮೊಳಗಳು. ಈ ಮರಗಳ





ಚಿತ್ರ 9

ಬುಡಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರ 50 ಮೊಳಗಳು. ಎರಡೂ ಮರಗಳ ತುದಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ಹಕ್ಕಿ ಕೂತಿದೆ. ತಾಳೆ ಮರಗಳ ನಡುವೆ ನದಿಯ ಹರಿವಿನಲ್ಲಿ ತಟಕ್ಕನೆ ಒಂದು ಮೀನು ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಬರುವುದನ್ನು ಎರಡೂ ಹಕ್ಕಿಗಳು ನೋಡುತ್ತವೆ. ಅವೆರಡೂ ಒಮ್ಮೆಲೇ ನೇರವಾಗಿ ಹಾರಿ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಆ ಮೀನಿನ ಬಳಿಗೆ ತಲಪುತ್ತವೆ.

ಮೂವತ್ತು ಮೊಳ ಎತ್ತರದ ಮರದ ಬುಡಕ್ಕೂ ಮೀನಿಗೂ ಇದ್ದ ಅಂತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

ಉತ್ತರ :

ಚಿತ್ರ 9ರಲ್ಲಿ ಕಾಣುವ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣ ಒದಗುತ್ತದೆ :

$$AB^2 = 30^2 + x^2, AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

ಎಂದಾಗುವುದು. ಆದರೆ, ಎರಡೂ ಹಕ್ಕಿಗಳೂ ಸಮಾನ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ದೂರಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿರುವುದರಿಂದ, AB = AC ಹಾಗಾಗಿ,

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

ಆವರಣಗಳನ್ನು ತೆರೆದು ಸರಳೀಕರಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ

$100x = 2000$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 20$.

30 ಮೊಳ ಎತ್ತರವಿದ್ದ ಮರದ ಬುಡದಿಂದ 20 ಮೊಳಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಮೀನು ಕಂಡುಬಂದಿತು.

ತಿರುಗಾಟಕ್ಕೆ ಹೋದಾಗ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ವೃದ್ಧ ವೈದ್ಯನೊಬ್ಬ ತನ್ನ ಗೆಳೆಯನಿಗೆ “ನಾಳೆ ಮನೆಗೆ ಬಾ” ಎಂದನು.

“ಆಮಂತ್ರಣಕ್ಕಾಗಿ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು. ನಾನು ಮೂರು ಗಂಟೆಗೆ ಮನೆಯಿಂದ ಹೊರಡುತ್ತೇನೆ. ನೀವು ಸಂಜೆಯ ತಿರುಗಾಟಕ್ಕೆ ಹೊರಡಬಯಸಬಹುದು. ಹಾಗಿದ್ದರೆ, ನೀವು ಅದೇ ವೇಳೆಗೆ ಮನೆಯಿಂದ ಹೊರಟರೆ, ನಾವಿಬ್ಬರೂ ಅರ್ಧ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತೇವೆ.”

“ನನಗೆ ವಯಸ್ಸಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀನು ಮರೆತಂತಿದೆ. ನಾನು ಗಂಟೆಗೆ 3 ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ಗಳು ಮಾತ್ರ ನಡೆಯಬಲ್ಲೆ. ನನಗಿಂತ ಸಾಕಷ್ಟು ಕಿರಿಯವನಾದ ನೀನು ನಿಧಾನವಾಗಿ ನಡೆದರೂ ಗಂಟೆಗೆ 4 ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ಗಳು ಕ್ರಮಿಸಬಲ್ಲೆ. ನಾವಿಬ್ಬರೂ ಅರ್ಧ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಬೇಕಾದರೆ ನೀನು ಸಾಕಷ್ಟು ಮೊದಲೇ ಮನೆ ಬಿಡಬೇಕಾಗುವುದು.”

“ಅದು ಸರಿ. ನಾನು ನಿಮಗಿಂತ ಗಂಟೆಗೆ ಒಂದು ಕಿಲೊಮೀಟರ್ ಹೆಚ್ಚು ನಡೆಯುವೆನಾದ್ದರಿಂದ ನಾನೇ ಮೊದಲು ಹೊರಟು ನೀವು ಮನೆ ಬಿಡುವ ವೇಳೆಗೆ ಒಂದು ಕಿ.ಮೀ. ನಡೆದು ಬರುತ್ತೇನೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ನಾನು ನಿಮಗಿಂತ ಕಾಲು ಗಂಟೆ ಮೊದಲೇ ಮನೆ ಬಿಡುತ್ತೇನೆ ಸಾಕಲ್ಲವೇ ?”

“ಎಷ್ಟು ಒಳ್ಳೆಯವನಪ್ಪ ನೀನು” ಎಂದ ವೃದ್ಧ ವೈದ್ಯ.

ಅದೇ ಪ್ರಕಾರ ಅವರು ಮರುದಿನ ತಿರುಗಾಟಕ್ಕೆ ಹೊರಟರು. ಕಿರಿಯನು ಅಪರಾಹ್ನ 2.45ಕ್ಕೆ ಮನೆಯಿಂದ ಹೊರಟು ಗಂಟೆಗೆ 4 ಕಿ.ಮೀ. ವೇಗದಲ್ಲಿ ನಡೆದ. ಹಿರಿಯ ವೈದ್ಯನು ಅಪರಾಹ್ನ 3 ಗಂಟೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಹೊರಟು ಗಂಟೆಗೆ 3 ಕಿ.ಮೀ. ನಂತೆ ನಡೆದ. ಇಬ್ಬರೂ ಸಂಧಿಸಿದಾಗ ವೈದ್ಯ ಬಂದ ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ತಿರುಗಿ ತನ್ನ ಕಿರಿಯ ರೋಗಿ ಮಿತ್ರನನ್ನು ಮನೆಗೆ ಕರೆದೊಯ್ದ.

ಮನೆಗೆ ಹೋದಾಗಲೇ, ತಾನು ಹಿರಿಯ ವೈದ್ಯನಿಗಿಂತ ಕಾಲುಗಂಟೆ ಮೊದಲೇ ಹೊರಟದ್ದರಿಂದ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ವೈದ್ಯನು ನಡೆದದ್ದಕ್ಕಿಂತ 4 ಪಟ್ಟು ದೂರವನ್ನು (ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಅಲ್ಲ) ತಾನು ಕ್ರಮಿಸಬೇಕಾಯಿತೆಂಬುದು ತನ್ನ ಮನೆಗೆ ಹಿಂತಿರುಗಿದ ಬಳಿಕವಷ್ಟೇ ಕಿರಿಯನಿಗೆ ಅರ್ಥವಾಯಿತು. ಅವರಿಬ್ಬರ ಮನೆಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರವೆಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ :

ಮನೆಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರವನ್ನು x (ಕಿ.ಮೀ.) ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

ಕಿರಿಯ ರೋಗಿಯು ಕ್ರಮಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ದೂರ $2x$ ಕಿ.ಮೀ. ವೈದ್ಯ ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ ಇದಕ್ಕಿಂತ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟು ಕಡಿಮೆ. ಅಂದರೆ, $^{2x}/_4 = {^x}/_2$ ಕಿ.ಮೀ. (ಅಂದರೆ $^x/_4$ನ ಅರ್ಧ) ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಸಂಧಿಸಿದಾಗ ವೈದ್ಯ ನಡೆದ ದೂರ $^x/_4$ ಕಿ.ಮೀ. ಗಳಾದರೆ, ಕಿರಿಯನು ಉಳಿದ ದೂರವನ್ನು ಅಂದರೆ, $^{3x}/_4$ ಕಿ.ಮೀ. ನಡೆದಿದ್ದ. ವೈದ್ಯನಿಗೆ ಈ ದೂರ ಕ್ರಮಿಸಲು $^x/_{12}$ ಗಂಟೆ ತಗಲಿದರೆ, ಕಿರಿಯನಿಗೆ $^{3x}/_{16}$ ಗಂಟೆಗಳು ಬೇಕಾಯಿತು. ಆತ ವೈದ್ಯನಿಗಿಂತ ಕಾಲುಗಂಟೆ ಜಾಸ್ತಿ ನಡೆದಿದ್ದಾನೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು.

ಈಗ ನಮಗೆ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ:

$$\frac{3x}{16}-\frac{x}{12}=\frac{1}{4}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 2.4$ ಕಿ.ಮೀ. ಗಳು. ಇದು ವೈದ್ಯ ಹಾಗೂ ಕಿರಿಯ ರೋಗಿಯ ಮನೆಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರ.

ಕೊಯ್ಲು ಕೆಲಸ

ಎ. ವಿ. ತ್ಸಿಂಗರ್ ಎಂಬ ಖ್ಯಾತ ಭೌತ ವಿಜ್ಞಾನಿಯು ಲೆವ್ ತೋಲ್ಸ್ತೊಯ್ ಹೇಳಿದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ತೋಲ್ಸ್ತೊಯ್‌ಗೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ತುಂಬಾ ಇಷ್ಟವಾಗಿತ್ತಂತೆ.

ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಎರಡರಷ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಎರಡು ಹೊಲಗಳ ಕೊಯ್ಲು ಕೆಲಸವನ್ನು, ಕೊಯ್ಲು ಮಾಡುವ ತಂಡವೊಂದಕ್ಕೆ ವಹಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಇಡೀ ತಂಡವು ದೊಡ್ಡ ಹೊಲದಲ್ಲಿ ಅರ್ಧ ದಿನ ದುಡಿಯಿತು. ಅನಂತರ ಆ ಗುಂಪು ಎರಡು ಸಮಭಾಗವಾಯಿತು. ಮೊದಲ ಗುಂಪು ಆ ದೊಡ್ಡ ಹೊಲದಲ್ಲೇ ಕೆಲಸ ಮುಂದುವರೆಸಿ ಸಂಜೆಯ ವೇಳೆಗೆ ಅಲ್ಲಿನ ಕೊಯ್ಲಿನ ಕೆಲಸ ಮುಗಿಸಿತು. ಎರಡನೆಯ ಗುಂಪು ಚಿಕ್ಕ ಹೊಲದಲ್ಲಿ ಕೊಯ್ಲು ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದರೂ, ಸಂಜೆಯ ವೇಳೆಗೆ ಅದರಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ಭಾಗ ಕೊಯ್ಲಾಗದೆ ಉಳಿಯಿತು. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು ಆ ಹೊಲದ ಉಳಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ದಿನವಿಡೀ ದುಡಿದು, ಅಲ್ಲಿನ ಕೊಯ್ಲು ಕೆಲಸವನ್ನು ಮಾರನೆಯ ದಿನ ಮುಗಿಸಿದನು. ಹಾಗಾದರೆ,

"ಆ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜನರಿದ್ದರು ?"

ಉತ್ತರ :

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ದುಡಿದವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದು x ಎಂದಿರಲಿ. ಇದಲ್ಲದೆ, ಒಬ್ಬ ಕೊಯ್ಲುಗಾರ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಕೊಯ್ಲು ಮಾಡಿದ ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಹರಿಸಲು

ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು y ಎಂದಿರಲಿ. ನಾವು y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಅದರ ನೆರವಿನಿಂದ x ನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದು.

ಈಗ ದೊಡ್ಡ ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು x ಮತ್ತು y ಗಳ ನೆರವಿನಿಂದ ವಿವರಿಸೋಣ. ಈ ಹೊಲದಲ್ಲಿ x ಕೊಯ್ಲುಗಾರರು ಅರ್ಧದಿನ ದುಡಿದರು. ಅವರು ಕೊಯ್ದ ಹೊಲದ ಭಾಗ

$$x \times \frac{1}{2} \times y = \frac{xy}{2}.$$

ದಿನದ ಉತ್ತರಾರ್ಧದ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಹೊಲದಲ್ಲಿ ಗುಂಪಿನ ಅರೆವಾಸಿ, ಅಂದರೆ $x/_2$ ಕೊಯ್ಲುಗಾರರು, ದುಡಿದರು. ಅವರು ಮಾಡಿದ ಕೆಲಸ:

$$\frac{x}{2} \times \frac{1}{2} \times y = \frac{xy}{4}.$$

ಸಂಜೆಯೊಳಗೆ ಆ ಹೊಲದಲ್ಲಿ ಕೊಯ್ಲಿನ ಕೆಲಸ ಮುಗಿದಿತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಹೊಲದ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ:

$$\frac{xy}{2}+\frac{xy}{4}=\frac{3xy}{4}.$$

ಈಗ ಸಣ್ಣ ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಅಲ್ಲಿ $^x/_2$ ಕೊಯ್ಲುಗಾರರು ಅರ್ಧದಿನ ದುಡಿದರು. ಅವರು ಕೊಯ್ದ ಕ್ಷೇತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, $\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}\times y=\frac{xy}{4}$. ಅಲ್ಲಿ ಆ ದಿನ ಕೊಯ್ಲಾಗದೇ ಉಳಿದದ್ದು y ಭಾಗ. (ಒಬ್ಬ ಕೊಯ್ಲುಗಾರ ಒಂದು ಕೆಲಸದ ದಿನದಲ್ಲಿ ಕೊಯ್ಲು ಮಾಡುವ ಭಾಗ) ಆದ್ದರಿಂದ ಸಣ್ಣ ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ :

$$\frac{xy}{4}+y=\frac{xy+4y}{4}.$$

ಈಗ "ಮೊದಲ ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಎರಡನೆಯ ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಇಮ್ಮಡಿ" ಎಂಬ ಮಾತನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕಾರ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ,

$$\frac{3xy}{4}\div\frac{xy+4y}{4}=2$$ ಅಥವಾ $$\frac{3xy}{xy+4y}=2.$$

ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ y ಯನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ತೆಗೆದರೆ (ಏಕೆಂದರೆ y ಯ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ) ನಮಗೆ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ :

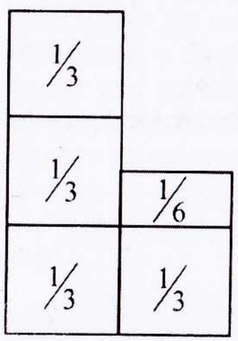
$$\frac{3x}{x+4}=2$$ ಅಥವಾ $3x=2x+8$.

ಹಾಗಾಗಿ $x = 8$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ತಂಡದಲ್ಲಿ 8 ಜನ ಕೊಯ್ಲುಗಾರರಿದ್ದರು.

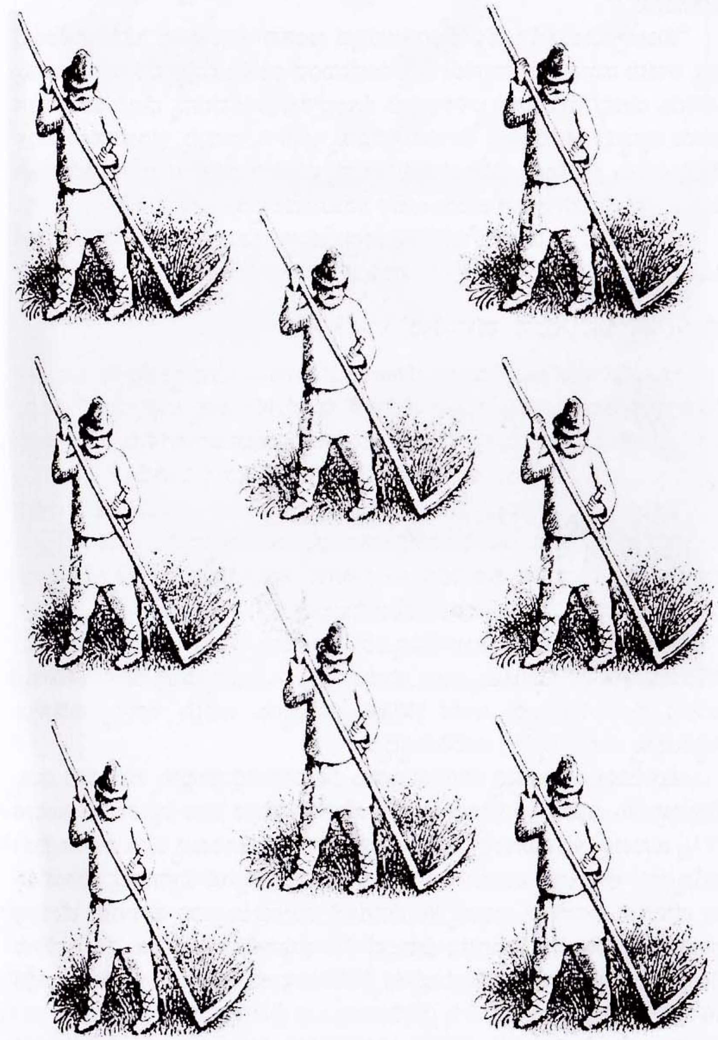
Algebra can be fun (ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ) ಪುಸ್ತಕದ ಪ್ರಥಮ ರಷ್ಯನ್ ಆವೃತ್ತಿ ಪ್ರಕಟವಾದ ಬಳಿಕ ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ಎ. ವಿ. ತ್ಸಿಂಗರ್ ನನಗೆ ಪತ್ರ ಬರೆದು, ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅತ್ಯಂತ ಕುತೂಹಲಕಾರಿ ಹಿನ್ನೆಲೆಯೊಂದರ ವಿವರಗಳನ್ನು ಕಳುಹಿಸಿಕೊಟ್ಟರು. ಅವರ ಅಭಿಪ್ರಾಯದಂತೆ, "ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಗಮನ ಸೆಳೆಯುವ ಅಂಶವೆಂದರೆ ಇದು ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆ ಅಲ್ಲವೇ ಅಲ್ಲ; ಇದು ಅಂಕಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆ. ಮಾತ್ರವಲ್ಲ ತೀರಾ ಸರಳವಾದ ಸಮಸ್ಯೆ. ಇದರ ವಿಚಿತ್ರ ಸ್ವರೂಪವಷ್ಟೇ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ತೊಡಕು."

ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಹೇಗೆ ರೂಪುಗೊಂಡಿತೆಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತಾ ಪ್ರೊಫೆಸರ್ ತ್ಸಿಂಗರ್ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ : "ನನ್ನ ತಂದೆ ಹಾಗೂ ನನ್ನ ಸೋದರ ಮಾವ ಐ. ಐ. ರಾಯೆವ್‌ಸ್ಕಿ (ಎಲ್. ತೋಲ್‌ಸ್ತೊಯ್‌ರವರ ಆಪ್ತಮಿತ್ರ) ಇವರಿಬ್ಬರೂ ಮಾಸ್ಕೊ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾಗ ಶಿಕ್ಷಣ ಶಾಸ್ತ್ರದಂತಹ ಒಂದು ವಿಷಯವಿದ್ದಿತು. ಈ ವಿಷಯದ ಸಲುವಾಗಿ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯವು ಆಯ್ದ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪಟ್ಟಣದ ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗಿ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಅಧ್ಯಾಪಕರ ನಿರ್ದೇಶನದಲ್ಲಿ ಪಾಠ ಕಲಿಸುವ ಅನುಭವ ಗಳಿಸಬೇಕಿತ್ತು. ಅಲ್ಲಿ ಪೆತ್ರೊವ್ ಎಂಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೊಬ್ಬ ಇದ್ದ. ಈತ ತ್ಸಿಂಗರ್ ಹಾಗೂ ರಾಯೆವ್‌ಸ್ಕಿಯವರ ಗೆಳೆಯ. ತುಂಬಾ ಚಾಣಾಕ್ಷ ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿಭಾವಂತ. (ನನ್ನ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯಂತೆ ಈತ ಬಹಳ ಕಿರಿಯ ವಯಸ್ಸಿನಲ್ಲೇ ಕ್ಷಯದಿಂದ ತೀರಿಕೊಂಡ) ಪೆತ್ರೊವ್‌ನ ಪ್ರಕಾರ, ಅಂಕಗಣಿತದ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಬಗೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬಳಸುವ ಅವೇ ಹಳೆಯ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಮಕ್ಕಳ ಕಲಿಕೆಯನ್ನೇ ಹಾಳು ಮಾಡಲಾಗುತ್ತಿದೆ. ತನ್ನ ಈ ಮಾತು ನಿಜವೆಂದು ತೋರಿಸಲು ಪೆತ್ರೊವ್ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದವುಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತಿದ್ದ; ಇವು ಶ್ರೇಷ್ಠ ಅಧ್ಯಾಪಕರನ್ನೂ ದಿಗ್ಭ್ರಮೆಗೆ ತಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದವಾದರೂ, ಶಾಲೆಯ ಶಿಕ್ಷಣದಿಂದ ಇನ್ನೂ ಹಾಳಾಗದೆ ಉಳಿದ ಸಮರ್ಥ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬಿಡಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. ಇಂಥವುಗಳಲ್ಲೊಂದು ಈ ಕೊಯ್ಲುಗಾರರ ಸಮಸ್ಯೆ (ಪೆತ್ರೊವ್ ಇಂತಹ ಹಲವಾರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿದ್ದ). ಅನುಭವಿ ಅಧ್ಯಾಪಕರು ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನೆರವಿನಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಶಕ್ತರಾಗಿದ್ದರು. ಆದರೆ ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲಕವೇ ಇವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನ ಅವರಿಗೆ ಹೊಳೆಯುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಹಳ ಸರಳವಾಗಿದ್ದು, ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನದ ಅಗತ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ.



ಚಿತ್ರ 10

"ದೊಡ್ಡ ಹೊಲದಲ್ಲಿ ಇಡೀ ಗುಂಪು ಅರ್ಧ ದಿನವೂ, ಅರ್ಧ ಗುಂಪು ಅರೆವಾಸಿ ದಿನವೂ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿ ಆ ಹೊಲವನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಕೊಯ್ಲು ಮಾಡಬಲ್ಲವು ಎಂದಾದರೆ ಅರ್ಧ ಗುಂಪು ಅರ್ಧ ದಿನದಲ್ಲಿ ಹೊಲದ $^1/_3$ ಭಾಗವನ್ನು ಕೊಯ್ಲು ಮಾಡಬಲ್ಲುದು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಈ ಪ್ರಕಾರ ಸಣ್ಣ ಹೊಲದಲ್ಲಿ (ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ದೊಡ್ಡ ಹೊಲದ ಅರ್ಧ) ಕೊಯ್ಲಾಗದೆ ಉಳಿದ ಭಾಗ $^1/_2 - ^1/_3 = ^1/_6$. ಈ $^1/_6$ ಭಾಗ ಹೊಲವನ್ನು ಒಬ್ಬ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಕೊಯ್ಲು



ಚಿತ್ರ 11

ಮಾಡಬಲ್ಲ ಅಂತ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಈ ಕೊಯ್ಲಾದ ಹೊಲಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $^6/_6 + ^2/_6 = ^8/_6$ ಅಂತ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇಷ್ಟು ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು 8 ಜನ ಕೊಯ್ಲುಗಾರರು ಬೇಕೇಬೇಕು.

"ತೋಲ್‌ಸ್ತೊಯ್‌ಗೆ ಬಹಳ ತೊಡಕಿನವಲ್ಲದ ಇಂತಹ ಚಮತ್ಕಾರದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳೆಂದರೆ ಇಷ್ಟ. ಅವರು ಯುವಕರಾಗಿದ್ದಾಗಲೇ ನನ್ನ ತಂದೆಯಿಂದ ಈ ಕೊಯ್ಲುಗಾರರ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಕಲಿತರು. ಹಲವು ವರುಷಗಳ ಬಳಿಕ ನಾನು ತೋಲ್‌ಸ್ತೊಯ್‌ರವರನ್ನು ಭೇಟಿ ಮಾಡಿದಾಗ ಅವರು ವೃದ್ಧರು. ಅವರೊಡನೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಿ, ಇದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಸರಳ ಚಿತ್ರವೊಂದನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ, ಇಡೀ ಸಮಸ್ಯೆ ಇನ್ನಷ್ಟು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಟ್ಟುವಷ್ಟು ಸರಳವಾಗಿ ತೋರುವುದೆಂದು ಹೇಳಿದಾಗ ಅವರು ಬಹಳ ಸಂತೋಷಪಟ್ಟರು. (ಚಿತ್ರ 10)"

ಬೀಜಗಣಿತದ ಬದಲಾಗಿ ಜಾಣತನದಿಂದ ಅಂಕಗಣಿತವನ್ನು ಬಳಸಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವೀಗ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಹಸುಗಳು

ಯೂನಿವರ್ಸಲ್ ಅರಿತ್‌ಮೆಟಿಕ್ (Universal Arithmetic) ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಐ. ನ್ಯೂಟನ್ "ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ನಿಯಮಗಳಿಗಿಂತ ಸಮಸ್ಯೆಗಳೇ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯುಕ್ತ" ಎಂದು ಬರೆದಿರುವ ತಮ್ಮ ಈ ಸಿದ್ಧಾಂತವನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಾರೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲೊಂದು ಮೇಯುವ ಹಸುಗಳ ಸಮಸ್ಯೆ. ಈ ವಿಶಿಷ್ಟ ಸಮಸ್ಯೆ ಹೀಗಿದೆ :

"ಹುಲ್ಲುಗಾವಲೊಂದರಲ್ಲಿ ಹುಲ್ಲು ದಟ್ಟವಾಗಿ ಬೇಗ ಬೇಗ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿತ್ತು. ಅಲ್ಲಿನ ಹುಲ್ಲನ್ನು 70 ಹಸುಗಳು 24 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಯ್ದು ಮುಗಿಸುತ್ತಿದ್ದವು; ಅದೇ ಹುಲ್ಲನ್ನು ಮೇಯ್ದು ಮುಗಿಸಲು 30 ಹಸುಗಳಿಗೆ 60 ದಿನಗಳು ತಗಲುತ್ತಿದ್ದವು. ಅಲ್ಲಿರುವ ಹುಲ್ಲನ್ನು ಎಷ್ಟು ಹಸುಗಳು 96 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ತಿ ಮೇಯಬಲ್ಲವು ?"

ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಚೆಕಾಫ್‌ನ *Tutor (ಟ್ಯೂಟರ್)* ಕತೆಯನ್ನು ನೆನಪಿಗೆ ತರುವ ಹಾಸ್ಯಮಯ ಕತೆಯೊಂದಕ್ಕೆ ಹಿನ್ನೆಲೆ ಒದಗಿಸಿತು. ಶಾಲಾ ಹುಡುಗನೊಬ್ಬ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕಾಗಿದ್ದು, ಹಿರಿಯ ಸಂಬಂಧಿಕರಿಬ್ಬರು ಅವನ ನೆರವಿಗೆ ಕೂತಿದ್ದರು. ಅವರು ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಕಷ್ಟಪಡುತ್ತಾ ಕಠಿಣ ಸನ್ನಿವೇಶ ಎದುರಿಸುತ್ತಿದ್ದರು.

ಅವರಲ್ಲೊಬ್ಬ ಹೇಳುತ್ತಿದ್ದ : "70 ಹಸುಗಳು 24 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಹುಲ್ಲನ್ನು ಮೇಯ್ದರೆ ಎಷ್ಟು ಹಸುಗಳು 96 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಯಬಲ್ಲವು ? ಸಹಜವಾಗಿಯೇ 70ರ $^1/_4$ ಪಾಲು, ಅಂದರೆ 17 $^1/_2$ ಹಸುಗಳು 96 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಯಬಲ್ಲವು....? ಇದು ಅಸಂಬದ್ಧ ವಿಷಯ. ಇಂಥದೇ ಇನ್ನೊಂದು ಅಸಂಬದ್ಧ ವಿಷಯ ಹೀಗಿದೆ : ಅಲ್ಲಿನ ಹುಲ್ಲನ್ನು 60 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಯಲು 30 ಹಸುಗಳು ಇರಬೇಕು; ಅದನ್ನು 96 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಯಲು ಎಷ್ಟು ಹಸುಗಳು ಬೇಕು ? ಇದರ ಉತ್ತರ, 18 $^3/_4$ ಹಸುಗಳು. ಅದಲ್ಲದೆ 70 ಹಸುಗಳಿಗೆ ಮೇಯಲು 24 ದಿನಗಳು ಬೇಕಾದರೆ, 30 ಹಸುಗಳಿಗೆ ಮೇಯಲು 56 ದಿನಗಳು ಸಾಕು, ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವಂತೆ 60 ದಿನಗಳಲ್ಲ."

"ಎಲ್ಲ ಸಮಯದಲ್ಲೂ ಹುಲ್ಲು ಬೆಳೆಯುತ್ತಲೇ ಇರುವುದೆಂಬ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದಿ ತಾನೇ ?" ಎಂದು ಇನ್ನೊಬ್ಬ ಕೇಳಿದ.



ಚಿತ್ರ 12

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯೇ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಮರ್ಮ : ಹುಲ್ಲು ಒಂದೇ ಸಮನೆ ಬೆಳೆಯುವುದೆಂಬ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ಗಮನಿಸದಿದ್ದರೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಅಸಾಧ್ಯ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಸಮಸ್ಯೆಯ ಆರಂಭದ ವಿವರಣೆಯೇ ವಿರೋಧಾಭಾಸವೆಂದು ತೋರುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ?

ಉತ್ತರ :

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲಿಕ್ಕೂ ಅಪರಿಚಿತಾಂಶವೊಂದನ್ನು ಬಳಸೋಣ : ದಿನನಿತ್ಯದ ಹುಲ್ಲಿನ ಹೆಚ್ಚಳ (ಬೆಳವಣಿಗೆ)ವು ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನಲ್ಲಿ ಹುಲ್ಲಿನ ಲಭ್ಯತೆಯ ಎಷ್ಟು ಭಾಗ ಎಂಬುದೇ ಈ ಅಪರಿಚಿತಾಂಶ. ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಯುವ ಹುಲ್ಲಿನ ಪರಿಮಾಣ y ಆಗಿರಲಿ. ಹಾಗಾದರೆ 24 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ 24y ಪರಿಮಾಣದ ಹುಲ್ಲು ಬೆಳೆಯುತ್ತದೆ. ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಹುಲ್ಲಿನ ಒಟ್ಟು ಪರಿಮಾಣ 1 ಎಂದಾದರೆ 24 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಹಸುಗಳು ಮೇಯುವ ಹುಲ್ಲು :

$$1+24y.$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ 70 ಹಸುಗಳ ಹಿಂಡು ಮೇಯುವ ಹುಲ್ಲು :

$$\frac{1+24y}{24}$$

ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಸು ಮೇಯುವ ಹುಲ್ಲು :

$$\frac{1+24y}{24 \times 70}.$$

ಅದೇ ರೀತಿ, ಅಲ್ಲಿನ ಹುಲ್ಲನ್ನು 30 ಹಸುಗಳು 60 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಯುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಸು ಪ್ರತಿದಿನ ಮೇಯುವ ಹುಲ್ಲು:

$$\frac{1+60y}{30 \times 60}.$$

ಆದರೆ, ಎರಡೂ ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಸುವೂ ದಿನವೊಂದಕ್ಕೆ ಮೇಯುವ ಹುಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಸಮಾನ. ಹಾಗಾಗಿ,

$$\frac{1+24y}{24 \times 70} = \frac{1+60y}{30 \times 60},$$

ಈ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ;

$$y = \frac{1}{480}.$$

y ಯ ಬೆಲೆ ತಿಳಿದ ಬಳಿಕ, ಒಂದು ಹಸು ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ಮೇಯ್ದ ಆರಂಭದಲ್ಲಿದ್ದ ಹುಲ್ಲಿನ ಪರಿಮಾಣದ ಪಾಲು ಎಷ್ಟೆಂದು ಈ ರೀತಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು :

$$\frac{1+24y}{24 \times 70} = \frac{1+24 \times \frac{1}{480}}{24 \times 70} = \frac{1}{1600}.$$

ಈಗ ಅಂತಿಮ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣ ರೂಪಿಸೋಣ.

ಒಟ್ಟು ಹಸುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದಾದರೆ,

$$\frac{1+96 \times \frac{1}{480}}{96x} = \frac{1}{1600}$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ, $x = 20$.

ಆದ್ದರಿಂದ, 20 ಹಸುಗಳು ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನ ಹುಲ್ಲನ್ನು 96 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಯ್ದು ಮುಗಿಸುತ್ತವೆ.

ನ್ಯೂಟನ್‌ನ ಸಮಸ್ಯೆ

ನ್ಯೂಟನ್‌ನ ಎತ್ತುಗಳ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ, ಈ ಮುಂಚಿನ "ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಹಸುಗಳು" ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ರಚಿಸಲಾಯಿತು. ಈಗ, ಅದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ನ್ಯೂಟನ್‌ನ ಎತ್ತುಗಳ ಸಮಸ್ಯೆ ಎಂಬ ಹೆಸರಿದ್ದರೂ ಇದನ್ನು ನ್ಯೂಟನ್ ರಚಿಸಲಿಲ್ಲ. ಇದು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಜನಪದರ ಮಿಳಿತದಿಂದಾಗಿ ರೂಪುಗೊಂಡ ಸಮಸ್ಯೆ.

"ಮೂರು ಹುಲ್ಲುಗಾವಲುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಮನಾದ ಬೆಳವಣಿಗೆಯ ಪ್ರಮಾಣವಿರುವ ಹಾಗೂ ದಟ್ಟಣೆಯ ಹುಲ್ಲು ಇದೆ. ಆ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕ್ರಮವಾಗಿ, $3\frac{1}{3}$ ಹೆಕ್ಟೇರುಗಳು, 10 ಹೆಕ್ಟೇರುಗಳು ಹಾಗೂ 24 ಹೆಕ್ಟೇರುಗಳು. ಮೊದಲು ಹುಲ್ಲುಗಾವಲು 12 ಎತ್ತುಗಳಿಗೆ 4 ವಾರಗಳು ಮೇವು ಒದಗಿಸಿತು. ಎರಡನೆಯದು 21 ಎತ್ತುಗಳಿಗೆ 9 ವಾರಗಳು ಮೇವು ಒದಗಿಸಿತು. ಮೂರನೆಯ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನಲ್ಲಿ 18 ವಾರಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತುಗಳು ಮೇಯಬಲ್ಲವು ?"

ಉತ್ತರ :

ಒಂದು ಹೆಕ್ಟೇರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಯುವ ಹುಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಎಂಬ ಅಪರಿಚಿತ ಅಂಶವನ್ನು ನಾವಿಲ್ಲಿ y ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸೋಣ. ಮೊದಲ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ $3\frac{1}{3}y$ ಹುಲ್ಲು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆರಂಭದಲ್ಲಿದ್ದ ಹುಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ನಾಲ್ಕು ವಾರಗಳಲ್ಲಿ ಬೆಳೆದ ಹುಲ್ಲು $3\frac{1}{3}y \times 4 = \frac{40}{3}y$. ಬೇರೆ ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಈ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಆದ ಹೆಚ್ಚಳ :

$$(3\frac{1}{3}y + \frac{40}{3}y)$$ ಹೆಕ್ಟೇರುಗಳು :

ಅಂದರೆ, 12 ಎತ್ತುಗಳು $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y$ ಹೆಕ್ಟೇರ್ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿರುವ ಹುಲ್ಲನ್ನು 4 ವಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಯ್ದಿವೆ. ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ 12 ಎತ್ತುಗಳು ಇದರ $^1/_4$ ಭಾಗವನ್ನು ಮೇಯುತ್ತವೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಒಂದು ಎತ್ತು ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಮೇಯುವ ಹುಲ್ಲು $^1/_{48}$ ನೆಯ ಭಾಗ. ಈ ಹುಲ್ಲು ಇರುವ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40y}{3}\right) \div 48 = \frac{10+40y}{144}$$ ಹೆಕ್ಟೇರುಗಳು.

ಎರಡನೆಯ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಎತ್ತು ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಮೇಯುವ ಹುಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನೂ ನಾವು ಇದೇ ರೀತಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು:

ಒಂದು ಹೆಕ್ಟೇರಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಾರದ ಬೆಳವಣಿಗೆ = y,
ಒಂದು ಹೆಕ್ಟೇರಿನಲ್ಲಿ ಒಂಭತ್ತು ವಾರಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆ = 9y,
ಹತ್ತು ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂಭತ್ತು ವಾರಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆ = 90y.

21 ಎತ್ತುಗಳಿಗೆ 9 ವಾರಗಳ ಅವಧಿ ಮೇಯಲು ಹುಲ್ಲು ಒದಗಿಸುವ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,

$10 + 90y$ ಹೆಕ್ಟೇರುಗಳು.

ಒಂದು ಎತ್ತಿಗೆ ಒಂದು ವಾರಕ್ಕೆ ಮೇಯಲು ಬೇಕಾಗುವ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

$$\frac{10+90y}{9 \times 21} = \frac{10+90y}{189}$$ ಹೆಕ್ಟೇರುಗಳು.

ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎತ್ತಿಗೆ ದೊರಕಿದ ಹುಲ್ಲಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಸಮಾನ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{10+40y}{144} = \frac{10+90y}{189}.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ, $y = \frac{1}{12}$.

ಈಗ ಒಂದು ಎತ್ತು ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ ಮೇಯುವ ಹುಲ್ಲನ್ನು ಒದಗಿಸುವ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ :

$$\frac{10+40y}{144} = \frac{10+40 \times \frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54} \text{ ಹೆಕ್ಟೇರು.}$$

ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಮೂರನೆಯ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸೋಣ. ಈ 24 ಹೆಕ್ಟೇರ್‌ಗಳ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲಿನಲ್ಲಿ 18 ವಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮೇಯುವ ಎತ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$\frac{24+24 \times 18 \times \frac{1}{12}}{18x} = \frac{5}{54}$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ $x = 36$. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂರನೆಯ ಹುಲ್ಲುಗಾವಲು 36 ಎತ್ತುಗಳಿಗೆ 18 ವಾರಗಳ ಅವಧಿ ಹುಲ್ಲನ್ನು ಒದಗಿಸಬಲ್ಲುದು.

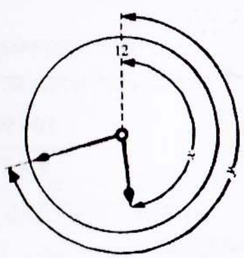
ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳುಗಳ ಅದಲು ಬದಲು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಆಲ್ಬರ್ಟ್ ಐನ್‌ಸ್ಟೈನ್‌ರ ಗೆಳೆಯ ಹಾಗೂ ಜೀವನ ಚರಿತ್ರಕಾರ ಎ. ಮೊಜ್ಕೊವ್‌ಸ್ಕಿಯವರು, ಖಾಯಿಲೆಯಿಂದ ಮಲಗಿದ್ದ ಐನ್‌ಸ್ಟೈನ್‌ರ ಮನರಂಜಿಸಲೆಂದು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳಿದರು. (ಚಿತ್ರ 13).

ಆತ ಹೇಳಿದ ಸಮಸ್ಯೆ ಹೀಗಿದೆ : "ಮಧ್ಯಾಹ್ನ 12 ಗಂಟೆಯಾದಾಗ ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಆಗ ಗಂಟೆ ಹಾಗೂ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೂ ಅವು ತೋರಿಸುವ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಏನೂ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗದು. ಆದರೆ ಬೇರೆ ವೇಳೆಗಳಲ್ಲಿ (6 ಗಂಟೆಯಾದಾಗ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ) ಹೀಗೆ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡುವುದು ಅಸಂಬದ್ಧವಾಗಿರಬಹುದು. ಇಂತಹ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳುಗಳು ಇರುವುದೇ ಇಲ್ಲ; ಅಂದರೆ ಗಂಟೆಯ ಮುಳ್ಳು 12 ತೋರಿಸುವಾಗ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು 6 ರಲ್ಲಿ ಇರಲಾರದು. ಈಗ ಉದ್ಭವಿಸುವ ಪ್ರಶ್ನೆ : ಮುಳ್ಳುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗಲೂ ಅವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳುಗಳಂತೆ ಸರಿಯಾದ ವೇಳೆಯನ್ನೇ ತೋರಿಸುವಂಥ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಮುಳ್ಳುಗಳು ಯಾವಾಗ ಮತ್ತು ದಿನದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಬರುತ್ತವೆ ?

"ಅನಾರೋಗ್ಯದಿಂದ ಹಾಸಿಗೆ ಹಿಡಿದಿರುವ ನನ್ನಂತಹವನಿಗೆ ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆ. ಸಾಕಷ್ಟು ಕುತೂಹಲಕಾರಿಯಾಗಿದೆ; ಆದರೆ ಸುಲಭವಾದುದೇನಲ್ಲ. ಈ ಮನರಂಜನೆ ಹೆಚ್ಚು ಹೊತ್ತು ಉಳಿಯಲಾರದೇನೋ ! ಏಕೆಂದರೆ, ನನಗೀಗಾಗಲೇ ಉತ್ತರದ ಸುಳಿವು ಗೊತ್ತಿದೆ." ಎಂದು ಹೇಳಿದರು ಐನ್‌ಸ್ಟೈನ್.



ಚಿತ್ರ 13

"ಹಾಗೆ ಹೇಳಿ ಹಾಸಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಎದ್ದು ಕುಳಿತ ಐನ್‌ಸ್ಟೈನ್ ಒಂದು ತುಂಡು ಕಾಗದದ ಮೇಲೆ ಆ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಆಧಾರ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಗುರುತು ಹಾಕಿದರು. ನನಗೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಳಲು ತಗಲಿದ್ದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಆತ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಮುಗಿಸಿದ್ದನು."

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದ್ದು ಹೇಗೆ ?

ಉತ್ತರ :

ನಾವು ಗಡಿಯಾರದ ಫಲಕದ ಮೇಲೆ ಇರುವ ಮುಳ್ಳುಗಳ ಅಂತರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವಾಗ 12ನ್ನು ಆರಂಭದ ಬಿಂದುವಾಗಿ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇನೆ. ವೃತ್ತದ 60 ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಈ ಮುಳ್ಳುಗಳು ದಾಟಿವೆ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುತ್ತೇವೆ.

ಗಂಟೆಯ ಮುಳ್ಳು 12ರಿಂದ ತೊಡಗಿ x ಭಾಗಗಳನ್ನು ದಾಟಿದಾಗ ಮತ್ತು ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು y ಭಾಗಗಳನ್ನು ದಾಟಿದಾಗ, ನಮಗೆ ಬೇಕಾದಂತಹ ಮುಳ್ಳುಗಳ ಸ್ಥಾನ ಸಂಯೋಜನೆ ಉಂಟಾಯಿತು ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಗಂಟೆಯ ಮುಳ್ಳು ಹನ್ನೆರಡು ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ 60 ಭಾಗಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆಗೆ 5 ಭಾಗಗಳನ್ನು ದಾಟುವುದರಿಂದ ಅದಕ್ಕೆ x ಭಾಗಗಳನ್ನು ದಾಟಲು $x/_5$ ಗಂಟೆಗಳು ಬೇಕಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಗಡಿಯಾರ 12 ಗಂಟೆ ತೋರಿಸಿದ ಬಳಿಕ, ಈ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರುವಾಗ $x/_5$ ಗಂಟೆಗಳು ಕಳೆದಿವೆ. ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು y ಭಾಗಗಳನ್ನು ದಾಟಲು y ನಿಮಿಷಗಳು, ಅಥವಾ $y/_{60}$ ಗಂಟೆಗಳು ತಗಲುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು 12 ನ್ನು ದಾಟಿದ ಬಳಿಕ ಈ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರುವಾಗ $y/_{60}$ ಗಂಟೆಗಳು ಕಳೆದಿದೆ. ಅಥವಾ

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{60}$$

ಗಂಟೆಗಳ ಮುಂಚೆ ಎರಡೂ ಮುಳ್ಳುಗಳು ಹನ್ನೆರಡರಲ್ಲಿ ಇದ್ದವು. ಇದೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ (0 ಯಿಂದ 11) ಏಕೆಂದರೆ 12ರ ನಂತರ ಎಷ್ಟು ಪೂರ್ಣ ಗಂಟೆಗಳು ಕಳೆದಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, ಈ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಮುಳ್ಳುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಅವು ತೋರಿಸುವ ಸಮಯವು 12 ಗಂಟೆಯ ಬಳಿಕದ

$$\frac{y}{5} - \frac{x}{60}$$

ಪೂರ್ಣ ಗಂಟೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೂ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ (0 ಯಿಂದ 11). ಈಗ ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒದಗುತ್ತವೆ :

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{60} = m \\ \frac{y}{5} - \frac{x}{60} = n \end{cases}$$

ಇಲ್ಲಿ m ಮತ್ತು n ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಅವುಗಳ ಮೌಲ್ಯ 0 ಯಿಂದ 11ರವರೆಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಆಗಿರಬಹುದು. ಇದರಿಂದ, ನಮಗೆ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು :

$$x = \frac{60\,(12m+n)}{143},$$

$$y = \frac{60\,(12n+m)}{143}.$$

m ಮತ್ತು n ಗಳಿಗೆ 0 ಯಿಂದ 11ರವರೆಗಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟರೆ ಮುಳ್ಳುಗಳು ತಲುಪುವ ನಮಗೆ ಅವಶ್ಯವಾದ ಎಲ್ಲ ಸಾಧ್ಯ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು. m ನ 12 ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ n ನ 12 ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರೊಡನೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮುಳ್ಳುಗಳು ನಿರ್ಮಿಸಬಹುದಾದ ಅಂಥ ಸ್ಥಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $12 \times 12 = 144$ ಎಂದು ತೋರಬಹುದು. ಆದರೆ, ಇಂಥ ಸ್ಥಾನಗಳು 143. ಏಕೆಂದರೆ $m = 0$ ಮತ್ತು $n = 0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಹಾಗೂ $m = 11$ ಮತ್ತು $n = 11$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಮುಳ್ಳುಗಳು ಒಂದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. $m = 11, n = 11$ ಆದಾಗ $x = 60, y = 60$ ಆಗಿ, ಗಡಿಯಾರ 12 ಗಂಟೆಯನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ, $m = 0, n = 0$ ಆದಾಗಲೂ ಗಡಿಯಾರ 12 ಗಂಟೆಯನ್ನೇ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಮುಳ್ಳುಗಳ ಎಲ್ಲ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದು ಬೇಡ, ಎರಡನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಮೊದಲನೆಯದು,

$$m = 1, n = 1;$$

$$x = \frac{60 \times 13}{143} = 5\frac{5}{11}, \quad y = 5\frac{5}{11}$$

ಈಗ ಗಡಿಯಾರ 1 ಗಂಟೆ $5\frac{5}{11}$ ನಿಮಿಷ ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಬಹುದು. (ಅವೆರಡೂ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಇದು ಸಾಧ್ಯ).

ಎರಡನೆಯ ಉದಾಹರಣೆ,

$$m = 8, \quad n = 5;$$

$$x = \frac{60\,(5+12 \times 8)}{143} \approx 42.38,$$

$$y = \frac{60\,(8+12 \times 5)}{143} \approx 28.53.$$

ಈಗ ಸಮಯ ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 ಗಂಟೆ 28.53 ನಿಮಿಷ ಹಾಗೂ 5 ಗಂಟೆ 42.38 ನಿಮಿಷಗಳು.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ 143 ಉತ್ತರಗಳಿವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ನಾವು ಅಪೇಕ್ಷಿಸುವ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಳ್ಳುಗಳು ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಇರಬಲ್ಲವು ಎಂಬುದನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು, ಗಡಿಯಾರದ ಮುಖವೃತ್ತವನ್ನು 143 ಸಮ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬೇಕು. ಆಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ 143 ಬಿಂದುಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳ ನಡುವಣ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಮುಳ್ಳುಗಳ ಯಾವುದೇ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸ್ಥಾನಗಳು ದೊರಕುವುದಿಲ್ಲ.

ಗಡಿಯಾರದ ಮುಳ್ಳುಗಳು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದಾಗುವುದು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಗಂಟೆಯ ಮುಳ್ಳು ಮತ್ತು ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಬರುವ ಎಷ್ಟು ಸ್ಥಾನಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗಡಿಯಾರದಲ್ಲಿವೆ ?

ಉತ್ತರ :

ಈ ಮುಂಚಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸುವಾಗ ದೊರಕಿದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಾವೀಗ ಬಳಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ, ಗಂಟೆಯ ಮುಳ್ಳು ಮತ್ತು ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಬಂದಾಗ ಅವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದರ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೂ ಯಾವುದೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗದು. ಈ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ, ಎರಡೂ ಮುಳ್ಳುಗಳು ಸಂಖ್ಯೆ 12ರಿಂದ ತೊಡಗಿ ಸಮಾನ ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ದಾಟಿರುತ್ತವೆ ಅಥವಾ $x = y$. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಮುಂಚಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯ ತರ್ಕದಿಂದ ನಾವು ಪಡೆಯುವ ಸಮೀಕರಣ :



ಚಿತ್ರ 14

$$\frac{x}{5} - \frac{x}{60} = m$$

ಇದರಲ್ಲಿ m ಅನ್ನುವುದು 0 ಯಿಂದ 11ರ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ. ಈಗ ಒದಗುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$x = \frac{60m}{11}.$$

ಈಗ, m ನ 12 ಸಂಭವನೀಯ ಬೆಲೆಗಳಿಂದ (0 ಯಿಂದ 11ರ ತನಕ) ಅಪೇಕ್ಷಿತ 11 ಸ್ಥಾನಗಳು (12 ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲ) ಸಿಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ; ಯಾಕೆಂದರೆ, $m = 11$ ಆದಾಗ $x = 60$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ ಎರಡೂ ಮುಳ್ಳುಗಳು 60 ವಿಭಾಗಗಳನ್ನು ದಾಟಿ 12ಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆ. $m = 0$ ಆದಾಗಲೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು

ಓದುಗರಿಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಊಹಿಸುವ ಆಟ ಗೊತ್ತಿರಬಹುದು. ಆಟ ನಡೆಸುವವನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಈ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ: ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯೋಚಿಸಿ, ಅದಕ್ಕೆ 2 ಕೂಡಿಸಿ, 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, 5 ಕಳೆಯಿರಿ, ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ – ಹೀಗೆ 5 ಅಥವಾ ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ 10 ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಸುತ್ತಾರೆ. ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ನಿಮಗೆ ದೊರಕಿದ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದೆಂದು ಕೇಳಿ, ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರದ ಆಧಾರದಿಂದ, ತಕ್ಷಣವೇ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ ಬಿಡುತ್ತಾರೆ.

ಈ "ತಂತ್ರ"ದ ಗುಟ್ಟು ಬಹಳ ಸರಳ; ಇಲ್ಲೂ ಸಮೀಕರಣಗಳೇ ಉತ್ತರ ನೀಡುತ್ತವೆ :

ಆಟ ನಡೆಸುವವನೊಬ್ಬ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಟ್ಟಿಯ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸರಣಿಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಹೇಳುತ್ತಾನೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ :

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯೋಚಿಸಿ	x
ಅದಕ್ಕೆ 2 ಕೂಡಿಸಿ	$x+2$
ಉತ್ತರವನ್ನು 3 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ	$3x+6$
ಇದರಿಂದ 5 ಕಳೆಯಿರಿ	$3x+1$
ಈಗ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ	$2x+1$
ಇದನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ	$4x+2$
ಇದರಿಂದ 1 ಕಳೆಯಿರಿ	$4x+1$

ಆತ ನಿಮ್ಮಿಂದ ಅಂತಿಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೇಳಿ ತಿಳಿದು, ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತಕ್ಷಣವೇ ಹೇಳಿಬಿಡುತ್ತಾರೆ. ಅವನು ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುತ್ತಾನೆ ?

ಇಲ್ಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯ ಬಲಭಾಗದ ಕಾಲಂನಲ್ಲಿ ಆಟ ನಡೆಸುವವನ ಆದೇಶಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಗೆ ಅನುವಾದಿಸಿದ್ದು, ಅದರ ಮೇಲೊಮ್ಮೆ ಕಣ್ಣು ಹಾಯಿಸಿದರೆ ಆತ ಹೇಗೆ ಉತ್ತರ ಹೇಳುತ್ತಾನೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ನೀವು x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಯೋಚಿಸಿದರೆ, ಎಲ್ಲ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಬಳಿಕ $4x+1$ ಸಿಗುತ್ತದೆಂಬುದು ಈ ಕಾಲಂನಿಂದ ಸುಸ್ಪಷ್ಟ. ಈ ವಿಷಯ ಗೊತ್ತಾದರೆ, ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು "ಊಹಿಸುವುದು" ಸುಲಭ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಿಮಗೆ ದೊರಕಿದ ಸಂಖ್ಯೆ 33 ಎಂದಿರಲಿ. ಗಣಿತ ಮಾಂತ್ರಿಕನು $4x+1=33$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿ, $x=8$ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಬೇರೆ ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಅವನು ಅಂತಿಮ ಉತ್ತರದಿಂದ 1 ಕಳೆದು ($33-1=32$), ಬಳಿಕ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $32 \div 4 = 8$ ಎಂಬ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ 8. ನಿಮ್ಮ ಅಂತಿಮ ಉತ್ತರ 25 ಎಂದಾದರೆ, ಗಣಿತ ಮಾಂತ್ರಿಕನು ಇದೇ ಮಾನಸಿಕ ಅಂಕಗಣಿತದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ ($25-1=24$, $24 \div 4 = 6$) ನೀವು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಯೋಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ 6 ಎನ್ನುತ್ತಾನೆ.

ಈಗ, ಇದು ಬಹಳ ಸರಳ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ನೀವು ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಯೋಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚಲು, ನಿಮ್ಮ ಅಂತಿಮ ಉತ್ತರದಿಂದ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದು ಗಣಿತ ಮಾಂತ್ರಿಕನಿಗೆ ಮೊದಲೇ ಗೊತ್ತಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ತಂತ್ರಕ್ಕಿಂತ ಮಿಗಿಲಾದ ಚಮತ್ಕಾರ ಮಾಡಲು ನಿಮಗೆ ಸಾಧ್ಯ. ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯರು ಯೋಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲೂ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಅವರೇ ಸೂಚಿಸಬೇಕೆಂದು ಹೇಳುವ ಮೂಲಕ ನೀವು ಅವರನ್ನು ಬೆರಗಾಗಿಸಬಹುದು. ಒಬ್ಬರು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯೋಚಿಸಿ, ಈ ಮುಂದಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಯಾವುದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಸೂಚಿಸಿ : ಬಹಿರಂಗಪಡಿಸಿದ ಅಂಕಿಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಅಥವಾ ಕಳೆಯಿರಿ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 2ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, 5ನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ, ಇತ್ಯಾದಿ), ಬಹಿರಂಗಪಡಿಸಿದ ಅಂಕೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ (ಆದರೆ ಭಾಗಿಸಬಾರದು : ಭಾಗಾಕಾರ ತಂತ್ರವನ್ನು ಬಹಳ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗಿಸುತ್ತದೆ), ಬಳಿಕ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಅಥವಾ ಕಳೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಗೊಂದಲದಲ್ಲಿ, ಬೀಳಿಸಬೇಕೆಂದು

ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಒಂದಾದ ಮೇಲೊಂದರಂತೆ ಮಾಡುತ್ತಲೇ ಹೋಗುತ್ತಾನೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಅವನು ಯೋಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ಎಂದಿರಲಿ (ಇದನ್ನು ಗುಟ್ಟಾಗಿಡಲಾಗುವುದು). ಈಗ ಅವನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾನೆ. ಅವು ಹೀಗಿರುತ್ತವೆ :

"ನಾನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯೋಚಿಸಿ, ಅದನ್ನು 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, 3 ಕೂಡಿಸಿ ಬಳಿಕ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೂಡಿಸಿದೆ; ಅನಂತರ 1 ಕೂಡಿಸಿ, 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಳೆದು, 3 ಕಳೆದು, ಪುನಃ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಳೆದು, ಮತ್ತೆ 2 ಕಳೆಯುತ್ತೇನೆ. ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಉತ್ತರವನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, 3 ಕೂಡಿಸುತ್ತೇನೆ."

ನಿಮ್ಮನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಗೊಂದಲದಲ್ಲಿ ಕೆಡವಿದ ಬಗ್ಗೆ ಖಚಿತವಾದ ಬಳಿಕ, ಅಂತಿಮ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆತ ತಿಳಿಸುತ್ತಾನೆ "ನನಗೆ ದೊರಕಿದ ಉತ್ತರ 49."

ನೀವು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ಎಂದು ಉತ್ತರವನ್ನು ಗುಂಡಿನಂತೆ ಸಿಡಿಸಿ, ಅವನನ್ನು ಅತೀವ ಅಚ್ಚರಿಯಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿಸುತ್ತೀರಿ. ಇದನ್ನೆಲ್ಲ ಹೇಗೆ ಮಾಡಲಾಯಿತೆಂದು ಈಗ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯನು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಡನೆ ನಡೆಸುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುವಾಗ ನೀವು x ನ ಜೊತೆ ಅವನ್ನೇ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಅವನು "ನಾನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯೋಚಿಸಿದ್ದೇನೆ" ಎಂದಾಗ ನೀವು (ನಿಮ್ಮಲ್ಲೇ) "ನಾನು x ಯೋಚಿಸಿದ್ದೇನೆ" ಎನ್ನುತ್ತೀರಿ. ಅವನು "ನಾನದನ್ನು 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದ್ದೇನೆ" (ಆತ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಿಜಕ್ಕೂ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತಾನೆ) ಅಂದಾಗ, ನೀವು x ನ್ನು 2ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ $2x$ ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ. ಅವನು 3 ಕೂಡಿಸುವಾಗ ನೀವು $2x+3$ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ ಮತ್ತು ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತೀರಿ. ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ತನ್ನ ತೀವ್ರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳ ಮೂಲಕ ನಿಮ್ಮನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯ ಗೊಂದಲದಲ್ಲಿ ಕೆಡವಿದಾಗ, ನೀವು ಈ ಮುಂದಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವುದನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೀರಿ. (ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯನು ಗಟ್ಟಿಯಾಗಿ ಹೇಳುವುದನ್ನು ಎಡಭಾಗದಲ್ಲೂ, ನೀವು ಮಾನಸಿಕವಾಗಿ ಮಾಡುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಬಲ ಭಾಗದಲ್ಲೂ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ) :

ನಾನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಯೋಚಿಸಿ	x
ಅದನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ	$2x$
ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ 3 ಕೂಡಿಸಿ	$2x+3$
ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೂಡಿಸಿ	$3x+3$
ಬಳಿಕ 1 ಕೂಡಿಸಿ	$3x+4$
2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ	$6x+8$
ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಳೆದು	$5x+8$
3 ಕಳೆದು	$5x+5$
ಪುನಃ ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ ಕಳೆದು	$4x+5$
2 ಕಳೆದು	$4x+3$
ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ	$8x+6$
ಮತ್ತೆ 3 ಕೂಡಿಸಿದೆ	$8x+9$

ಈಗ, $8x+9$ ಉತ್ತರದ ಮೂಲಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ನೀವೇ ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡುತ್ತೀರಿ. ಅವನು ತನ್ನ ಉತ್ತರ 49 ಅಂದಾಗ, ನಿಮಗೆ ಅವಶ್ಯವಾದ ಸಮೀಕರಣ ಸಿಗುತ್ತದೆ : $8x+9=49$. ಇದನ್ನು ಒಂದೇ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಿ, ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ 5 ಅಂತ ನೀವು ನೇರವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ಇದೊಂದು ವಿಸ್ಮಯಗೊಳಿಸುವ ತಂತ್ರ ಯಾಕೆಂದರೆ ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯ ತಾನು ಇಚ್ಛಿಸುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನೇ ಮಾಡಲು ನೀವು ಅವಕಾಶ ನೀಡುತ್ತೀರಿ :

ಈ ತಂತ್ರವು ಸೋತು ಹೋಗುವ ಒಂದು ಸನ್ನಿವೇಶ ಇದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಹಲವು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳ ಬಳಿಕ ನಿಮಗೆ $x+14$ ದೊರಕಿದಾಗ, ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯ "ಈಗ ನಾನು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಳೆದು 14 ಪಡೆದಿದ್ದೇನೆ." ಅಂದರೆ, ನೀವೂ $(x+14)-x=14$ ಮಾಡಿ, 14 ಪಡೆಯುತ್ತೀರಾದರೂ, ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣ ಇಲ್ಲದಿರುವ ಕಾರಣ ನೀವು ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ ಊಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇಂಥ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ನೀವು ಹೀಗೆ ಮಾಡಬಹುದು : ನೀವು ಅಪರಿಚಿತ x ಇಲ್ಲದಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶ ಪಡೆದೊಡನೆಯೇ, ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯನ ಮಾತನ್ನು ತಡೆದು, ಹೀಗನ್ನಿ "ಸಾಕು ! ನಿನ್ನಿಂದ ಯಾವ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನೂ ಹೇಳದಿದ್ದರೂ, ಈಗ ನೀನು ಪಡೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ ನನಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ; ಅದು 14" ಇದು ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯನನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿನ ಅಚ್ಚರಿಯಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿಸುತ್ತದೆ. ಯಾಕೆಂದರೆ ಅವನು ನಿಮಗೇನನ್ನೂ ತಿಳಿಸಿಲ್ಲ! ನೀವು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಊಹಿಸಲಾಗದಿದ್ದರೂ, ಇದೊಂದು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿ ತಂತ್ರ.

ಇಂತಹ ತಂತ್ರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಳಸುವುದೆಂಬ ಉದಾಹರಣೆ ಇಲ್ಲಿದೆ (ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಪಟ್ಟಿಯ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿವೆ) :

ನಾನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಯೋಚಿಸಿ	x
ಅದಕ್ಕೆ 2 ಕೂಡಿಸಿ	$x+2$
ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ	$2x+4$
ಬಳಿಕ 3 ಕೂಡಿಸಿ	$2x+7$
ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಳೆದು	$x+7$
5 ಕೂಡಿಸಿ	$x+12$
ಮತ್ತೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಳೆದೆ	12

ನೀವು 12 ಸಂಖ್ಯೆ ಪಡೆದಾಗ, ಅಪರಿಚಿತ x ಇಲ್ಲದ ಫಲಿತಾಂಶವಿದು ಎಂದು ಗೊತ್ತಾದ ತಕ್ಷಣ, ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯನ ಮಾತು ತಡೆದು, ಆತ ಪಡೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 12 ಎಂದು ಹೇಳಿಬಿಡಬೇಕು.

ನೀವು ಸ್ವಲ್ಪ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿಕೊಂಡರಾಯಿತು; ಅನಂತರ ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯರೊಡನೆ ಈ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಅಸಂಬದ್ಧ ಸಮಸ್ಯೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಮೇಲ್ನೋಟಕ್ಕೆ ಅಸಂಬದ್ಧ ಎಂದು ತೋರಬಹುದಾದ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆ ಇಲ್ಲಿದೆ :

$8\times 8=54$ ಆದರೆ ಸಂಖ್ಯೆ 84 ಅಂದರೆಷ್ಟು ?

ಈ ವಿಚಿತ್ರ ಪ್ರಶ್ನೆ ಅರ್ಥಹೀನವಾದುದಲ್ಲ ; ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಯತ್ನಿಸಿ.

ಉತ್ತರ :

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದಶಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿಲ್ಲವೆಂದೂ, ಬೇರೊಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ ದ್ವಿಮಾನ ದಶಮಾನವೋ ಮತ್ತಿನ್ನಾವುದೋ ಮಾನ) ಇವೆಯೆಂದೂ ನೀವು ಊಹಿಸಿರಬಹುದು. ಇಲ್ಲವಾದರೆ, "ಸಂಖ್ಯೆ 84 ಅಂದರೆಷ್ಟು ?" ಎಂಬ ಪದ ಸಮೂಹ ಅಸಂಬದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯ ಆಧಾರ ಅಂಕಿ x ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ, "84" ಸಂಖ್ಯೆಯು ಈ ಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ ಎರಡನೆಯ ಸ್ಥಾನದ 8 ಆಧಾರ ಮೌಲ್ಯಾಂಕಗಳನ್ನೂ, ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನದ 4 ಮೌಲ್ಯಾಂಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$“84”=8x+4.$$

ಇದೇ ರೀತಿ, ಸಂಖ್ಯೆ "54" ಅಂದರೆ $5x+4$.

ಈಗ, $8\times 8=5x+4$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇನೆ. ದಶಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, $64=5x+4$, ಹಾಗಾಗಿ $x=12$.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದ್ವಾದಶಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ, "84" = $8\times 12+4=100$. ಆದ್ದರಿಂದ, 8×8 = "54" ಆದರೆ, "84" = 100.

ಇದೇ ರೀತಿಯ ಪರಿಹಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಇಂಥದೇ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಳಸಬಹುದು.

$5\times 6=33$ ಆದರೆ ಸಂಖ್ಯೆ 100 ಅಂದರೆಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ : ನವಮಾನ (ತಳಸಂಖ್ಯೆ 9) ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ 81.

ಸಮೀಕರಣವೇ ಯೋಚಿಸುತ್ತದೆ !

ಸಮೀಕರಣವು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ನಿಮಗಿಂತಲೂ ಜಾಸ್ತಿ ಜಾಣ್ಮೆ ತೋರಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಊಹಿಸದಿದ್ದರೆ, ಈ ಮುಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು 32 ವರುಷಗಳು ಮತ್ತು ಮಗನದ್ದು 5 ವರುಷಗಳು. ತಂದೆಗೆ ಮಗನ 10 ಪಟ್ಟು ವಯಸ್ಸಾಗಲು ಎಷ್ಟು ವರುಷಗಳು ತಗಲುತ್ತವೆ ? ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕಾದ ವರುಷಗಳು x ಎಂದಿರಲಿ. ಹಾಗಾಗಿ, x ವರುಷಗಳ ಬಳಿಕ ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು $32+x$ ಮತ್ತು ಮಗನ ವಯಸ್ಸು $5+x$ ವರುಷಗಳು. ಆಗ, ತಂದೆಗೆ ಮಗನಿಗಿಂತ 10 ಪಟ್ಟು ವಯಸ್ಸಾಗಿರಬೇಕಾದ ಕಾರಣ ನಮಗೆ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$32+x=10(5+x)$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ, ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ $x=-2$.

ಇದರರ್ಥ, 2 ವರುಷಗಳ ಮುನ್ನ ಎಂದು. ನಾವು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿದಾಗ, ತಂದೆಯ ವಯಸ್ಸು ಮಗನದ್ದಕ್ಕಿಂತ 10 ಪಟ್ಟು ಜಾಸ್ತಿ ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಗಮನ ನೀಡಲಿಲ್ಲ; ಆ ಅನುಪಾತ ಗತಕಾಲದಲ್ಲೇ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯ. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಸಮೀಕರಣವು ನಮಗಿಂತಲೂ ಜಾಸ್ತಿ ಜಾಣತನದಿಂದ ನಮ್ಮ ದೋಷವನ್ನು ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟಿತು.

ಕುತೂಹಲಕಾರಿ ಮತ್ತು ಅನಿರೀಕ್ಷಿತ

ಸಮೀಕರಣಗಳೊಂದಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವಾಗ, ಅನನುಭವಿ ಗಣಿತಜ್ಞನಿಗೆ ವಿಚಿತ್ರವೆನಿಸುವ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂಥ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಇಲ್ಲಿವೆ :

I. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳಿರುವ ಎರಡಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ. ದಶಸ್ಥಾನದಂಕೆ ಏಕಸ್ಥಾನದಂಕೆಗಿಂತ 4 ಕಡಿಮೆ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವೇ ಅಂಕಗಳನ್ನು ವಿಲೋಮ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ ಬಂದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆದರೆ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ 27.

ದಶಸ್ಥಾನದಂಕೆಯನ್ನು x ಎಂದೂ, ಏಕಸ್ಥಾನದಂಕೆಯನ್ನು y ಎಂದೂ ಸೂಚಿಸಿ, ನಾವು ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸಲು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ರಚಿಸಬಹುದು.

$$\begin{cases} x = y - 4, \\ (10y + x) - (10x + y) = 27. \end{cases}$$

ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿರುವ xನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎರಡನೆಯದಕ್ಕೆ ಅಳವಡಿಸಿದಾಗ,

$$10y + y - 4 - [10(y-4) + y] = 27$$

ಮತ್ತೆ ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$36 = 27.$$

ಅಪರಿಚಿತಾಂಶಗಳ ಬೆಲೆ ನಮಗೆ ತಿಳಿಯದಿದ್ದರೂ, 36 = 27 ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗಿದೆ.... ಇದರ ಅರ್ಥ ಏನು ?

ಇದರರ್ಥ : ಸೂಚಿತ ಷರತ್ತುಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವ ಎರಡಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲವೇ ಇಲ್ಲ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ವಿರುದ್ಧವಾಗಿವೆ.

ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಪಾಲುಗಳನ್ನು 9 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$9y - 9x = 36$$

ಅದೇ ರೀತಿ, ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ (ಆವರಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಾಗ)

$$9y - 9x = 27.$$

ಒಂದೇ ಹಾಗೂ ತತ್ಸಮಾನ ಪರಿಮಾಣವಾದ $9y - 9x$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರಕಾರ 36 ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರಕಾರ 27. ಇದು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಅಸಾಧ್ಯ, ಯಾಕೆಂದರೆ $36 \neq 27$.

ಇದೇ ರೀತಿಯ ಅಪಾರ್ಥವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗಲೂ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ:

$$\begin{cases} x^2y^2 = 8, \\ xy = 4. \end{cases}$$

ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡನೆಯದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$xy = 2$$

ಈ ಫಲಿತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ :

$$\begin{cases} xy = 4, \\ xy = 2 \end{cases}$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ 4 = 2. ಈ ಸಮೀಕರಣ–ಸಮೂಹಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಲ್ಲ. ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲದ ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣ–ಸಮೂಹಗಳನ್ನು ಅಪ್ರಮಾಣ ಬದ್ಧ (ambiguous) ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ.

II. ಈ ಮೊದಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಷರತ್ತುಗಳನ್ನು ತುಸು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ನಿಮಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ದಶಮಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆ ಏಕಸ್ಥಾನದಕ್ಕಿಂತ 3 ಕಡಿಮೆ (4 ಕಡಿಮೆಯಲ್ಲ) ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ; ಸಮಸ್ಯೆಯ ಇತರ ಅಂಶಗಳು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಈಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ದಶಮಸ್ಥಾನದಂಕೆ x ಎಂದಾದರೆ, ಮೊದಲ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು $x + 3$ಆಗುತ್ತದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉಳಿದಂಶವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ,

$$10(x+3) + x - [10x + (x+3)] = 27.$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$27 = 27.$$

ಇದು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಸತ್ಯ. ಆದರೆ ಇದು xನ ಬೆಲೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಮಗೇನನ್ನೂ ತಿಳಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಸಮಸ್ಯೆಯ ಷರತ್ತುಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲವೆಂದು ಇದರರ್ಥವೇ ?

ತದ್ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಇದರರ್ಥ ನಾವು ರಚಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣ ಸರ್ವಾನ್ವಯ ಎಂದು. ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದ xಗೆ ಯಾವ ಬೆಲೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದರೂ ಈ ಸಮೀಕರಣ ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಏಕಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯು ದಶಮಸ್ಥಾನದ್ದಕ್ಕಿಂತ 3 ಜಾಸ್ತಿಯಾಗಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲೂ ಈ ಗುಣ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು :

14 + 27 = 41, 47 + 27 = 74,
25 + 27 = 52, 58 + 27 = 85,
36 + 27 = 63, 69 + 27 = 96.

ಮೂರಂಕಿಗಳ ಹಾಗೂ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿ :

1. ದಶಮಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆ 7,
2. ಶತಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆ ಏಕಸ್ಥಾನದ್ದಕ್ಕಿಂತ 4 ಕಡಿಮೆ,
3. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 396 ಜಾಸ್ತಿ.

ಏಕಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯನ್ನು x ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ, ಸಮೀಕರಣ ರಚಿಸೋಣ :

$$100x + 70 + x - 4 - [100(x-4) + 70 + x] = 396.$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಉತ್ತರ,

$$396 = 396.$$

ಓದುಗರಿಗೆ ಇದರರ್ಥವೇನೆಂದು ಈಗಾಗಲೇ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಮೂರಂಕೆಯ ಯಾವುದೇ

ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಮೊದಲಂಕೆಯು ಮೂರನೆಯ ಅಂಕೆಗಿಂತ 4 ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದ್ದಾಗ (ದಶಮ ಸ್ಥಾನದಂಕೆಯು ಯಾವ ಪರಿಣಾಮವನ್ನೂ ಉಂಟುಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ), ಇದರ ಅಂಕಿಗಳನ್ನು ವಿಲೋಮ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ, ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ 396, ಜಾಸ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೂ ನಾವು ಕೃತಕ ಹಾಗೂ ಗ್ರಾಂಥಿಕವೆನಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿದ್ದೆವು. ಸಮೀಕರಣ ರಚನೆಯ ಕೌಶಲ್ಯವನ್ನು ಕೈಗೂಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದೇ ಇವುಗಳ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿತ್ತು. ನಾವೀಗ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಕರಗತ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸ್ವರೂಪದ, ಕೈಗಾರಿಕೆ, ನಿತ್ಯಜೀವನ, ಮಿಲಿಟರಿ ಕ್ಷೇತ್ರ ಹಾಗೂ ಕ್ರೀಡೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಕ್ಷೌರದಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಕ್ಷೌರಿಕ ವೃತ್ತಿಗೆ ಬೀಜಗಣಿತದಿಂದ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಹಾಯವಾದೀತೇ ? ಹೌದು, ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಕ್ಷೌರಿಕನೊಬ್ಬ ಒಂದು ಅಸಾಮಾನ್ಯ ಬೇಡಿಕೆಯೊಂದಿಗೆ ನನ್ನ ಬಳಿ ಬಂದಾಗ ನನಗೆ ಈ ವಿಷಯ ಮನದಟ್ಟಾಯಿತು.

"ನಾವು ಎದುರಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆ ಪರಿಹರಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುವಿರಾ ?" ಎಂದು ಕೇಳಿದನೊಬ್ಬ ಕ್ಷೌರಿಕ.

"ಇದರಿಂದಾಗಿ ನಾವು ಬಹಳಷ್ಟು ದ್ರಾವಣ ಹಾಳು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ" ಎಂದ ಇನ್ನೊಬ್ಬ ಕ್ಷೌರಿಕ.

"ಸಮಸ್ಯೆ ಏನು ?" ಎಂದು ಕೇಳಿದೆ ನಾನು.

"ನಮ್ಮ ಬಳಿ ಜಲಜನಕದ ಪೆರಾಕ್ಸೈಡಿನ ಎರಡು ದ್ರಾವಣಗಳಿವೆ. ಒಂದು ಶೇಕಡಾ 30ರ ದ್ರಾವಣ ಇನ್ನೊಂದು ಶೇಕಡಾ 3ರ ದ್ರಾವಣ. ನಾವು ಇವನ್ನು ಬೆರಸಿ ಶೇಕಡಾ 12ರ ದ್ರಾವಣ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ; ಆದರೆ ನಮಗೆ ಮಿಶ್ರ ಮಾಡಲು ಸೂಕ್ತ ಅನುಪಾತವೇ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತಿಲ್ಲ."

ಉತ್ತರ :

ಇದನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತದಿಂದ ಪರಿಹರಿಸಬಹುದಾದರೂ, ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲಕ ಕ್ಷಿಪ್ರವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಸರಳವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಶೇಕಡಾ 12ರ ಮಿಶ್ರಣ ತಯಾರಿಸಲು ಶೇಕಡಾ 3ರ ದ್ರಾವಣದ x ಗ್ರಾಂಗಳು ಮತ್ತು ಶೇಕಡಾ 30ರ ದ್ರಾವಣದ y ಗ್ರಾಂಗಳು ಅವಶ್ಯ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ, ಶುದ್ಧ ಜಲಜನಕದ ಪೆರಾಕ್ಸೈಡ್ ಮೊದಲ ಪಾಲಿನಲ್ಲಿ $0.03x$ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪಾಲಿನಲ್ಲಿ 0.3y ಗ್ರಾಂ ಇರುತ್ತದೆ; ಹಾಗೂ ಜಲಜನಕದ ಪೆರಾಕ್ಸೈಡಿನ ಒಟ್ಟು ಪ್ರಮಾಣ :

$$0.03x + 0.3y.$$

ಎರಡೂ ದ್ರಾವಣಗಳ ಮಿಶ್ರಣದಿಂದ ಒದಗುವ $(x+y)$ ಗ್ರಾಂ ದ್ರಾವಣದಲ್ಲಿ $0.12(x+y)$ ಗ್ರಾಂ ಶುದ್ಧ ಜಲಜನಕದ ಪೆರಾಕ್ಸೈಡ್ ಇರಬೇಕು. ಈಗ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$0.03x + 0.3y = 0.12(x+y).$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ $x = 2y$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ;

ಆದ್ದರಿಂದ, ಶೇಕಡಾ 3ರ ದ್ರಾವಣಕ್ಕೆ ಅದರ ಎರಡು ಪಾಲಿನಷ್ಟು ಶೇಕಡಾ 30ರ ದ್ರಾವಣ ಬೆರಸಿ ಮಿಶ್ರಣ ತಯಾರಿಸಬೇಕು.

ಟ್ರಾಂ ಕಾರುಗಳು ಮತ್ತು ದಾರಿಹೋಕ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಟ್ರಾಂ ಹಳಿಯ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ನಡೆಯುತ್ತಿರುವಾಗ, ಪ್ರತಿ 12 ನಿಮಿಷಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಒಂದು ಟ್ರಾಂ ಕಾರು ನನ್ನ ಹಿಂಬದಿಯಿಂದ ಬಂದು ನನ್ನನ್ನು ದಾಟಿ ಹೋಗುತ್ತಿತ್ತು ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿ 4 ನಿಮಿಷಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಎದುರುಗಡೆಯಿಂದ ಬರುವ ಒಂದು ಟ್ರಾಂ ಕಾರು ನನ್ನನ್ನು ದಾಟಿ ಹೋಗುತ್ತಿತ್ತು. ಟ್ರಾಂಕಾರು ಮತ್ತು ನಾನು ಬದಲಾಗದ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಾಗುತ್ತಿದ್ದೆವು.

ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಹೊರಡುವ ಟ್ರಾಂಕಾರುಗಳು ಎಷ್ಟು ಸಮಯದ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಹೊರಡುತ್ತಿದ್ದವು ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಲ್ಲಿರಾ ?

ಉತ್ತರ :

ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಪ್ರತಿ x ನಿಮಿಷಗಳಿಗೊಂದು ಟ್ರಾಂಕಾರು ಹೊರಡುತ್ತದೆಂದಾದರೆ, ನಾನೊಂದು ಟ್ರಾಂಕಾರನ್ನು ಸಂಧಿಸಿದ ಜಾಗಕ್ಕೆ x ನಿಮಿಷಗಳ ಬಳಿಕ ಇನ್ನೊಂದು ಟ್ರಾಂಕಾರು ಬರುತ್ತದೆ. ಅದು ನಡೆಯುತ್ತಿರುವ ನನ್ನನ್ನು ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದಾದರೆ, ಉಳಿದ $12-x$ ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಅದು ನಾನು 12 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರವನ್ನೇ ಕ್ರಮಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ನಾನು ಒಂದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುವ ದೂರವನ್ನು ಟ್ರಾಂಕಾರು $\frac{12-x}{12}$ ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

ನನ್ನೆದುರಿನಿಂದ ಬರುವ ಟ್ರಾಂಕಾರುಗಳಲ್ಲಿ, ಮೊದಲನೆಯದು ಸಂಧಿಸಿದ 4 ನಿಮಿಷಗಳ ಬಳಿಕ ಇನ್ನೊಂದು ನನ್ನ ಎದುರಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದಾದರೆ, ಉಳಿದ $(x-4)$ ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಅದು, ನಾನು 4 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರವನ್ನೇ ಕ್ರಮಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ನಾನು ಒಂದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುವ ದೂರವನ್ನು ಟ್ರಾಂಕಾರು $\frac{x-4}{4}$ ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಂದಾಗ ನಮಗೆ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ, ಇದು –

$$\frac{12-x}{12} = \frac{x-4}{4}$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ $x = 6$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ 6 ನಿಮಿಷಗಳಿಗೊಂದು ಟ್ರಾಂಕಾರು ಹೊರಡುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು, ಅಂಕಗಣಿತ ಬಳಸಿ, ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಒಂದರ ಹಿಂದೊಂದು ಬರುವ ಟ್ರಾಂಕಾರುಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರವನ್ನು 'a' ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ನನಗೂ, ಎದುರಾಗಿ ಬರುವ ಟ್ರಾಂಕಾರಿಗೂ ಇರುವ ಅಂತರ ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ $\frac{a}{4}$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ (ಏಕೆಂದರೆ, ಟ್ರಾಂಕಾರು ಮತ್ತು ನಾನು ಒಟ್ಟಾಗಿ 4 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟಾಗಿ 'a' ಅಂತರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸುತ್ತೇವೆ; ಇದು ದಾಟಿಹೋದ ಟ್ರಾಂಕಾರಿಗೂ ಅದರ ಬೆನ್ನಲ್ಲಿ ಬರುವ ಟ್ರಾಂಕಾರಿಗೂ ನಡುವಣ ಅಂತರ). ಈಗ, ಪ್ರತಿ 12 ನಿಮಿಷಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಒಂದು ಟ್ರಾಂಕಾರು ಹಿಂಬದಿಯಿಂದ ಬಂದು ನನ್ನನ್ನು ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆಯೆಂದಾದರೆ, ನಮ್ಮ ನಡುವಣ ಅಂತರ ಪ್ರತಿ ನಿಮಿಷ $\frac{a}{12}$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಹೀಗೆ ಭಾವಿಸೋಣ: ನಾನು ಒಂದು ನಿಮಿಷ ಮುಂದಕ್ಕೆ ನಡೆದು, ಬಳಿಕ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ತಿರುಗಿ ಒಂದು ನಿಮಿಷ ನಡೆಯುತ್ತೇವೆ. (ಹೊರಟಲ್ಲಿಗೇ ವಾಪಾಸು ಬರುತ್ತೇನೆ). ಮೊದಲನೆಯ ಒಂದು ನಿಮಿಷದ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ನನ್ನಹಾಗೂ ಎದುರಾಗಿ ಬರುವ ಟ್ರಾಂಕಾರ್‌ನ ನಡುವಣ ಅಂತರ $\frac{a}{4}$ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ,

ಎರಡನೆಯ ಒಂದು ನಿಮಿಷದ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ (ಅದೇ ಟ್ರಾಂಕಾರ್ ನನ್ನ ಬೆನ್ನ ಹಿಂದಿನಿಂದ ಬರುತ್ತಿದ್ದಾಗ) ನಮ್ಮ ನಡುವಣ ಅಂತರ $\frac{a}{12}$ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ 2 ನಿಮಿಷಗಳ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ನಮ್ಮ ನಡುವಣ ಅಂತರ $\frac{a}{4}+\frac{a}{12}=\frac{a}{3}$ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ನಾನು ಒಂದೇ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ನಿಂತರೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಗುತ್ತದೆ, ಏಕೆಂದರೆ ಎಲ್ಲ ನಡೆದಾಟದ ಬಳಿಕ ನಾನು ಅದೇ ಜಾಗಕ್ಕೆ ವಾಪಾಸು ಬಂದಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾನು ಚಲಿಸದಿದ್ದರೆ, ಒಂದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ (ಎರಡು ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಲ್ಲ) ಟ್ರಾಂಕಾರು $\frac{a}{3}\div 2=\frac{a}{6}$ ಅಂತರದಷ್ಟು ನನಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿ, ಒಟ್ಟು ದೂರ 'a' ಯನ್ನು 6 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಬಹುದು. ಇದರರ್ಥ, ಚಲಿಸದೆ ನಿಲ್ಲುವ ವ್ಯಕ್ತಿಯನ್ನು 6 ನಿಮಿಷಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಒಂದು ಟ್ರಾಂಕಾರು ದಾಟಿ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ತೆಪ್ಪಗಳು ಮತ್ತು ಉಗಿ ಬೋಟುಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ :

A ಪಟ್ಟಣ ಮತ್ತು B ಪಟ್ಟಣದ (ನದಿ ಪ್ರವಾಹದ ಕೆಳ ಮುಖದಲ್ಲಿದೆ) ನಡುವಣ ಅಂತರವನ್ನು ಒಂದು ಉಗಿ ಬೋಟು ಎಲ್ಲೂ ನಿಲ್ಲದೆ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿ, 5 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಪ್ರವಾಹಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ B ಯಿಂದ A ಗೆ ಇದೇ ವಾಹನವು ಅದೇ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿ, ಅದೇ ದೂರವನ್ನು 7 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ (ಈಗಲೂ ಎಲ್ಲೂ ನಿಲ್ಲುವುದಿಲ್ಲ). ನದಿ ಪ್ರವಾಹದ ವೇಗದಲ್ಲೇ ಚಲಿಸುವ ಒಂದು ತೆಪ್ಪಕ್ಕೆ A ಯಿಂದ Bಗೆ ಹೋಗಲು ಎಷ್ಟು ಗಂಟೆಗಳು ಬೇಕು?

ಉತ್ತರ :

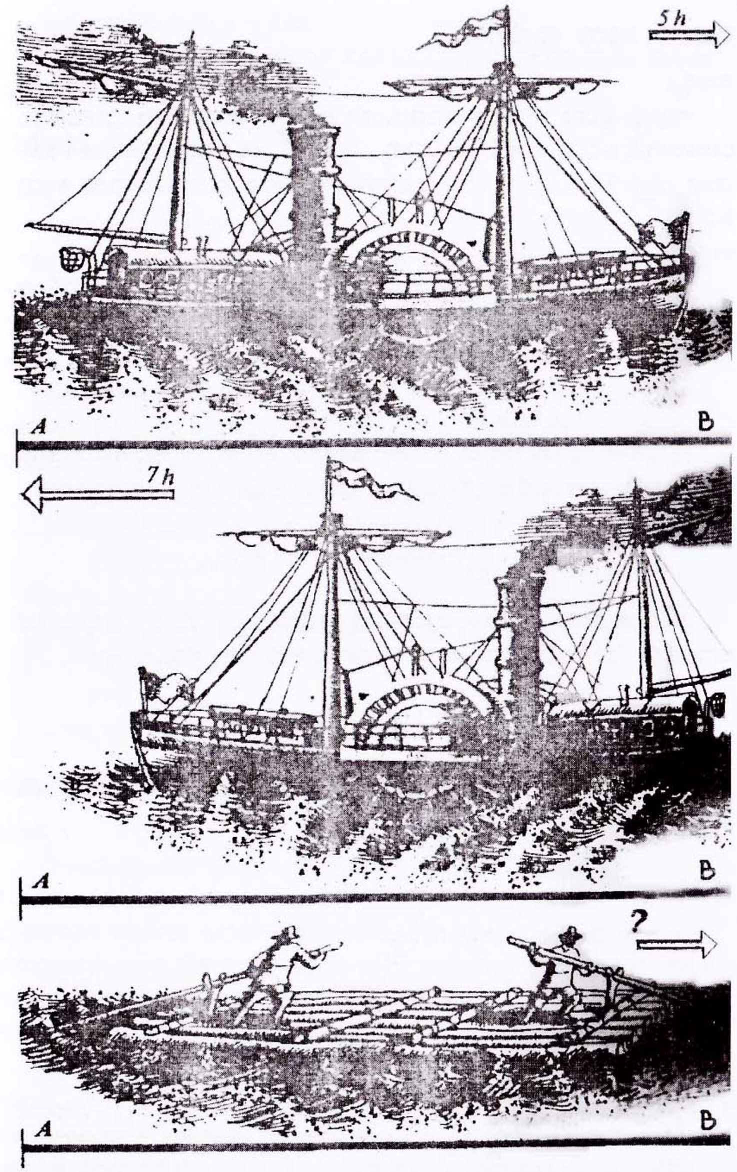
A ಯಿಂದ Bಗೆ ಚಲಿಸದ ನೀರಿನಲ್ಲಿ (ತನ್ನ ಯಾಂತ್ರಿಕ ವೇಗದಲ್ಲಿ) ಸಾಗಲು ಬೋಟಿಗೆ ತಗಲುವ ಸಮಯವನ್ನು x(ಗಂಟೆಗಳು) ಎಂದೂ, ತೆಪ್ಪಗಳಿಗೆ ಅದೇ ದೂರ ಕ್ರಮಿಸಲು ತಗಲುವ ಸಮಯವನ್ನು y ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಒಂದು ಗಂಟೆಯಲ್ಲಿ AB ಅಂತರದ $\frac{1}{x}$ ಭಾಗವನ್ನು ಬೋಟ್‌ಗಳೂ, $\frac{1}{y}$ ಭಾಗವನ್ನು ತೆಪ್ಪಗಳೂ (ಪ್ರವಾಹದೊಡನೆ ಸಾಗುತ್ತಾ) ಕ್ರಮಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಉಗಿ ಬೋಟು ಪ್ರವಾಹದೊಡನೆ ಸಾಗುವಾಗ AB ಅಂತರದ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ಭಾಗವನ್ನೂ, ಪ್ರವಾಹಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಸಾಗುವಾಗ $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ ಭಾಗವನ್ನೂ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಯ ವಿವರಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರವಾಹ ಮುಖವಾಗಿ ಸಾಗುವಾಗ ಉಗಿ ಬೋಟು ಅಂತರದ $\frac{1}{5}$ನೆಯ ಭಾಗವನ್ನೂ, ಪ್ರವಾಹಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಸಾಗುವಾಗ ಅಂತರದ $\frac{1}{7}$ ನೆಯ ಭಾಗವನ್ನೂ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ ನಮಗೆ ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ.

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{7}. \end{cases}$$

ಇವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ, ಭಾಜಕಗಳು ಇರುವಂತೆಯೇ ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲನೆಯದರಿಂದ ಕಳೆಯುವುದು ಅತ್ಯುತ್ತಮ. ಈಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ :

$$\frac{2}{y}=\frac{2}{35}$$

ಆದ್ದರಿಂದ y = 35. ತೆಪ್ಪಗಳು A ಯಿಂದ B ಅಂತರವನ್ನು 35 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 15

ಕಾಫಿಯ ಎರಡು ಕ್ಯಾನುಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಕಾಫಿಯ ಎರಡು ಕ್ಯಾನುಗಳ ಆಕಾರ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದು, ಅವನ್ನು ಒಂದೇ ಲೋಹದಿಂದ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದರ ತೂಕ 2 ಕೆ.ಜಿ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 12 ಸೆ.ಮೀ. ಇನ್ನೊಂದರ ತೂಕ 1 ಕೆ.ಜಿ. ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 9.5 ಸೆ.ಮೀ. ಎರಡೂ ಕ್ಯಾನುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕಾಫಿ ಪಾನೀಯದ ತೂಕ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

ದೊಡ್ಡ ಕ್ಯಾನಿನ ಕಾಫಿಯ ತೂಕವನ್ನು x ಎಂದೂ, ಸಣ್ಣ ಕ್ಯಾನಿನ ಕಾಫಿಯ ತೂಕವನ್ನು y ಎಂದೂ ಸೂಚಿಸಿ. ಈ ಕ್ಯಾನುಗಳ ತೂಕ ಕ್ರಮವಾಗಿ z ಮತ್ತು t ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y + t = 1. \end{cases}$$

ಕ್ಯಾನುಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿ ಇರುವ ವಸ್ತುಗಳ ತೂಕಗಳ ಅನುಪಾತ : ಅವುಗಳ ಗಾತ್ರಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಘನಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮ*. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{x}{y} = \frac{12^3}{9.5^3} \approx 2.02 \text{ ಅಥವಾ } x = 2.02y.$$

ಖಾಲಿ ಕ್ಯಾನುಗಳ ತೂಕಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಒಟ್ಟು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮ ಅಂದರೆ ಅವು, ಎತ್ತರಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{z}{t} = \frac{12^2}{9.5^2} \approx 1.60 \text{ ಅಥವಾ } z = 1.60t.$$

ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು z ಗಳ ಬೆಲೆ ಅಳವಡಿಸಿದಾಗ, ಸಿಗುವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು:

$$\begin{cases} 2.02y + 1.60t = 2, \\ y + t = 1. \end{cases}$$

ಇವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಉತ್ತರ :

$$y = \frac{20}{21} = 0.95, \ t = 0.05.$$

* ಕ್ಯಾನುಗಳ ಲೋಹ ತೆಳುವಾಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಈ ಅನುಪಾತ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಖಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಕ್ಯಾನುಗಳ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈಗಳು ಸಮರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ; ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಮುಖ್ಯವಾದುದು ಎತ್ತರದ ವ್ಯತ್ಯಾಸ : ಖಚಿತವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಕ್ಯಾನಿನ ಒಳಭಾಗದ ಎತ್ತರವು, ಕ್ಯಾನಿನ ಎತ್ತರಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 1.92$, $z = 0.08$.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ದೊಡ್ಡ ಕ್ಯಾನಿನ ಕಾಫಿಯ ತೂಕ 1.92 ಕೆ.ಜಿ. ಮತ್ತು ಸಣ್ಣ ಕ್ಯಾನಿನ ಕಾಫಿಯ ತೂಕ 0.94 ಕೆ.ಜಿ.

ನರ್ತನದ ಜೊತೆಗಾರರು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಸ್ನೇಹಕೂಟವೊಂದರಲ್ಲಿ 20 ಜನರು ನರ್ತಿಸಿದರು. ಮೇರಿ ಏಳು ಜೊತೆಗಾರರೊಂದಿಗೂ, ಜಲ್ಲಾ ಎಂಟು ಜೊತೆಗಾರರೊಂದಿಗೂ, ವೆರಾ ಒಂಭತ್ತು ಜೊತೆಗಾರರೊಂದಿಗೂ, ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲರೂ ನರ್ತಿಸಿ, ಕೊನೆಯವಳಾದ ನಿನಾ ಎಲ್ಲ ಜೊತೆಗಾರರೊಂದಿಗೂ ನರ್ತಿಸಿದಳು. ಸ್ನೇಹಕೂಟದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಯುವಕ ಜೊತೆಗಾರರಿದ್ದರು ?

ಉತ್ತರ :

ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದವನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿದ್ದಾದರೆ, ಇದು ಬಹಳ ಸುಲಭದ ಸಮಸ್ಯೆ. ಯುವಕರ ಬದಲಾಗಿ, ಯುವತಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟೆಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕೋಣ; ಯುವತಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದಿರಲಿ :

ಮೊದಲು, ಮೇರಿ 6 + 1 ಜೊತೆಗಾರರೊಂದಿಗೆ,
ಎರಡನೆಯದಾಗಿ, ಓಲ್ಗಾ 6 + 2 ಜೊತೆಗಾರರೊಂದಿಗೆ,
ಮೂರನೆಯದಾಗಿ, ವೆರಾ 6 + 3 ಜೊತೆಗಾರರೊಂದಿಗೆ,

....

x ಆಗಿ, ನಿನಾ $6 + x$ ಜೊತೆಗಾರರೊಂದಿಗೆ ನರ್ತಿಸಿದಳು.

ಈಗ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$x + (6 + x) = 20$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ, $x = 7$. ಆದ್ದರಿಂದ ಸ್ನೇಹಕೂಟದಲ್ಲಿ 20 – 7 = 13 ಯುವಕರಿದ್ದರು.

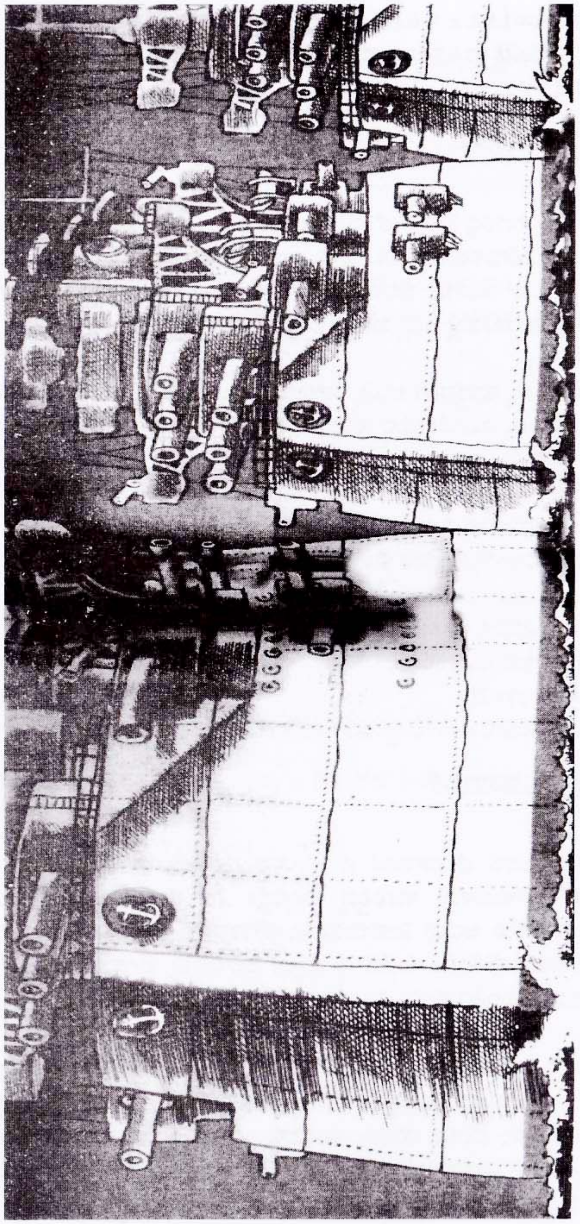
ಸಮುದ್ರದಲ್ಲಿ ಬೇಹುಗಾರಿಕೆ

ಸಮಸ್ಯೆ 1 :

ನೌಕಾದಳವೊಂದರ ಬೇಹುಗಾರಿಕೆ ನೌಕೆಗೆ ಸಮುದ್ರದ ಭಾಗವೊಂದರ ಜವಾಬ್ದಾರಿ ನೀಡಲಾಯಿತು; ನೌಕಾದಳವು ಸಾಗುತ್ತಿದ್ದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲೇ 70 ಮೈಲುಗಳ ದೂರದವರೆಗೆ ಬೇಹುಗಾರಿಕೆ ಮಾಡಲು ಆದೇಶ ನೀಡಲಾಯಿತು. ನೌಕಾದಳವು ಗಂಟೆಗೆ 35 ಮೈಲುಗಳು ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಅವರ ನೌಕೆಯು ಗಂಟೆಗೆ 70 ಮೈಲು ಚಲಿಸುತ್ತಿತ್ತು. ಬೇಹು ನೌಕೆಯು ಕೆಲಸ ಮುಗಿಸಿ ನೌಕಾದಳಕ್ಕೆ ಹಿಂತಿರುಗಲು ಎಷ್ಟು ಸಮಯ ತಗಲುವುದೆಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ.

ಉತ್ತರ :

ಆ ಸಮಯ x ಗಂಟೆಗಳು ಎಂದಿರಲಿ. ಈ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ನೌಕಾದಳವು $35x$ ಮೈಲುಗಳನ್ನೂ ಬೇಹು ನೌಕೆಯು $70x$ ಮೈಲುಗಳನ್ನೂ ಕ್ರಮಿಸಿದೆ. ಬೇಹು ನೌಕೆಯು 70 ಮೈಲುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿದ್ದಲ್ಲದೆ, ಬೇಹು ಮುಗಿಸಿ ವಾಪಾಸು ಬರುವಾಗ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರ ಕ್ರಮಿಸಿದೆ. ನೌಕಾದಳವು ಅದರ ಪಥದ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನಷ್ಟೇ ಕ್ರಮಿಸಿತು. ಅವೆರಡೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ $70x + 35x$ ದೂರ ಕ್ರಮಿಸಿದವು; ಇದು 2×70 ಮೈಲುಗಳಿಗೆ ಸಮ.



ಚಿತ್ರ 16

ಈಗ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣ;

$$70x + 35x = 140,$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ :

$$x = \frac{140}{105} = 1\frac{1}{3} \text{ ಗಂಟೆಗಳು}$$

ಬೇಹು ನೌಕೆಯು 1 ಗಂಟೆ 20 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ನೌಕಾದಳವನ್ನು ಮರಳಿ ಸೇರುತ್ತದೆ.

ಸಮಸ್ಯೆ 2 :

ನೌಕಾದಳವೊಂದು ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸಮುದ್ರ ಭಾಗವೊಂದರ ಬೇಹುಗಾರಿಕೆ ನಡೆಸಬೇಕೆಂದು ಅದರ ಬೇಹು ನೌಕೆಗೆ ಆದೇಶ ನೀಡಲಾಯಿತು. ಬೇಹು ನೌಕೆಯು ನೌಕಾದಳಕ್ಕೆ 3 ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂತಿರುಗಬೇಕಾಗಿತ್ತು. ಬೇಹು ನೌಕೆಯ ವೇಗ 60 ನಾಟ್‌ಗಳೂ, ನೌಕಾದಳದ ವೇಗ 40 ನಾಟ್‌ಗಳೂ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಬೇಹುನೌಕೆ ಬೇಹುಗಾರಿಕೆ ಮಾಡುತ್ತಾ, ಎಷ್ಟು ಸಮಯ ಕಳೆದ ಬಳಿಕ ವಾಪಾಸಾಗಲಿಕ್ಕಾಗಿ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ತಿರುಗುತ್ತದೆ ?

ಉತ್ತರ :

ಬೇಹು ನೌಕೆಯು x ಗಂಟೆಗಳ ಬಳಿಕ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ತಿರುಗುತ್ತದೆ ಎಂದಿರಲಿ; ಹಾಗಾಗಿ, ಅದು ನೌಕಾದಳದಿಂದ ದೂರ ಸಾಗಿದ್ದರೆ x ತಾಸುಗಳಾದರೆ, ಬಳಿಕ $3 - x$ ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ನೌಕಾದಳದಲ್ಲಿ ವಾಪಾಸು ಚಲಿಸಿತು. ಎಲ್ಲ ನೌಕೆಗಳೂ ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾಗ, ಬೇಹುನೌಕೆಯು x ತಾಸುಗಳಲ್ಲಿ ನೌಕಾದಳದಿಂದ ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರವು ನೌಕಾದಳದ ನೌಕೆಗಳೂ ಬೇಹುನೌಕೆಯೂ ಸಾಗಿದ ದೂರಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮ ಈ ಅಂತರ :

$$60x - 40x = 20x.$$

ನೌಕಾದಳಕ್ಕೆ ಹಿಂತಿರುಗುವಾಗ, ಬೇಹುನೌಕೆಯು ಮರುಯಾನದಲ್ಲಿ $60\,(3 - x)$ ಕ್ರಮಿಸಿದರೆ, ನೌಕಾದಳವು $40(3 - x)$ ಸಾಗಿತು. ಅವೆರಡೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ $10x$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$$60(3-x) + 40(3-x) = 20x$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ :

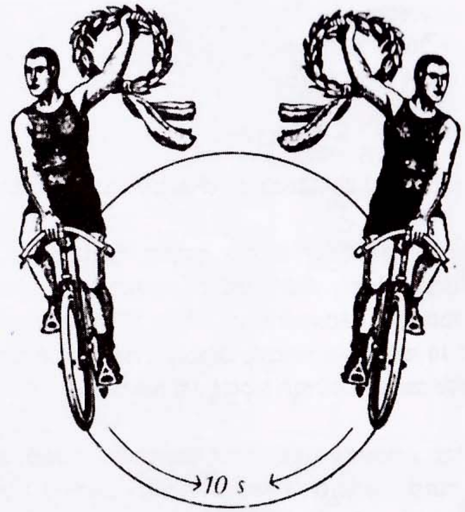
$$x = 2\frac{1}{2}.$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಬೇಹು ನೌಕೆಯು ನೌಕಾದಳದಿಂದ ಹೊರಟು 2 ಗಂಟೆ 30 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಕ್ಕೆ ತಿರುಗಬೇಕು.

ಸೈಕಲ್ ಪಥದಲ್ಲಿ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಸೈಕಲ್ ಪಥದಲ್ಲಿ, ಬದಲಾಗದ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರು ಸೈಕಲ್ ಸವಾರರು ಸುತ್ತುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 17) ಸುತ್ತುವಾಗ ಪ್ರತಿ 10 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ಸಂಧಿಸುತ್ತಾರೆ; ಅವರು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸುತ್ತುವಾಗ ಒಬ್ಬನು ಇನ್ನೊಬ್ಬನನ್ನು ಪ್ರತಿ 170 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಿಗೊಮ್ಮೆ ದಾಟುತ್ತಾನೆ. ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಸೈಕಲ್ ಪಥದ ಸುತ್ತಳತೆ 170 ಮೀಟರ್‌ಗಳಾದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರನ ವೇಗವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ.



ಚಿತ್ರ 17

ಉತ್ತರ :

ಒಬ್ಬ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರನ ವೇಗ x ಎಂದಾದರೆ 10 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಅವನು $10x$ ದೂರ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತಾನೆ. ಇನ್ನೊಬ್ಬ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರನು ಮೊದಲನೆಯವನಿಗೆ ಎದುರಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಪರಸ್ಪರರು ಸಂಧಿಸುವ ಮುನ್ನ ಎರಡನೆಯವನು ವೃತ್ತ ಪಥದ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು, $170 - 10x$ ಮೀಟರ್‌ಗಳನ್ನು, ಕ್ರಮಿಸುತ್ತಾನೆ: ಎರಡನೆಯ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರನ ವೇಗ y ಎಂದಾದರೆ, 10 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ ಅವನು 10y ದೂರ ಸಾಗುತ್ತಾನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$170 - 10x = 10y.$$

ಸೈಕಲ್ ಸವಾರರು ಒಬ್ಬರ ಹಿಂದೊಬ್ಬರಂತೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಮೊದಲನೆಯವ 170 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ $170x$ ಮೀಟರ್‌ಗಳನ್ನೂ, ಎರಡನೆಯವ 170y ಮೀಟರ್‌ಗಳನ್ನೂ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತಾನೆ. ಮೊದಲನೆಯವ ಎರಡನೆಯವನಿಗಿಂತ ವೇಗವಾಗಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಪರಸ್ಪರರನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಮುನ್ನ, ಮೊದಲನೆಯವ ವೃತ್ತಪಥಕ್ಕೆ ಎರಡನೆಯವನಿಗಿಂತ ಒಂದು ಪೂರ್ತಿ ಸುತ್ತು ಜಾಸ್ತಿ ಸುತ್ತಿರುತ್ತಾನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$170x - 170y = 170.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$x + y = 17, \quad x - y = 1$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ,

$$x = 9,\ y = 8 \text{(ಮೀಟರ್‌ಗಳು/ಸೆಕೆಂಡ್)}$$

ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲ್ ಸವಾರರ ಸ್ಪರ್ಧೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಮೂರು ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲ್‌ಗಳಿದ್ದ ಸ್ಪರ್ಧೆಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲವೂ ಜೊತೆಯಾಗಿ ಹೊರಟಿದ್ದರೂ, ಒಂದು ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲ್ ಮೊದಲನೆಯದಕ್ಕಿಂತ 15 ಕಿ.ಮೀ. ಕಡಿಮೆ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದಕ್ಕಿಂತ 3 ಕಿ.ಮೀ. ಜಾಸ್ತಿ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತಿತ್ತು; ಅದು ಮುಕ್ತಾಯದ ಗೆರೆಯನ್ನು ಮೊದಲನೆಯದಕ್ಕಿಂತ 12 ನಿಮಿಷಗಳ ಬಳಿಕ ಹಾಗೂ ಮೂರನೆಯದಕ್ಕಿಂತ 3 ನಿಮಿಷಗಳ ಮುನ್ನ ದಾಟಿತು. ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲೂ ನಿಲ್ಲದೆ ಅವು ಸಾಗಿದ್ದವು.

ಈಗ, ಇವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ :

1) ಸ್ಪರ್ಧಾ ಪಥದ ದೂರ
2) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲ್‌ನ ವೇಗ,
3) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲ್‌ನ ಪಥ ಕ್ರಮಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಸಮಯ.

ಉತ್ತರ :

ಏಳು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದ್ದರೂ, ನಾವು ಎರಡೇ ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ; ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಿರುವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ಎರಡನೆಯ ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿನ ವೇಗ x ಎಂದಿರಲಿ. ಹಾಗಾದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿನ ವೇಗ $x+15$ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯದರ ವೇಗ $x-3$.

ಸ್ಪರ್ಧಾಪಥದ ಉದ್ದ y ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ, 3 ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲ್‌ಗಳ ಪಥಕ್ರಮಣದ ಸಮಯ ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ :

ಮೊದಲನೆಯ ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿಗೆ $\frac{y}{x+15}$,

ಎರಡನೆಯ ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿಗೆ $\frac{y}{x}$,

ಮೂರನೆಯ ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿಗೆ $\frac{y}{x-3}$.

ಸ್ಪರ್ಧಾ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಎರಡನೆಯ ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿಗೆ ಮೊದಲನೆಯದಕ್ಕಿಂತ 12 ನಿಮಿಷಗಳು (ಅಥವಾ $^1/_5$ ತಾಸು) ಜಾಸ್ತಿ ತಗಲಿತೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5}.$$

ಸ್ಪರ್ಧಾ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಮೂರನೆಯ ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿಗೆ ಎರಡನೆಯದಕ್ಕಿಂತ 3 ನಿಮಿಷಗಳು (ಅಥವಾ $^1/_{20}$ ತಾಸು) ಜಾಸ್ತಿ ತಗಲಿತು. ಹಾಗಾಗಿ,

$$\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}.$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು 4 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಮೊದಲನೆಯದರಿಂದ ಕಳೆದರೆ,

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} - 4\left(\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x}\right) = 0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನು y ಯಿಂದ (ಇದರ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲ) ಭಾಗಿಸಿ, ಛೇದಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಕಳಚಿಬಿಡಿ.

ಈಗ,

$$(x+15)(x-3) - x(x-3) - 4x(x+15) + 4(x+15)(x-3) = 0.$$

ಆವರಣಗಳನ್ನು ಕಳಚಿ ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$3x - 225 = 0$$

ಅಂತಿಮವಾಗಿ,

$$x = 75.$$

x ನ ಬೆಲೆ ತಿಳಿದ ಬಳಿಕ, ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ y ಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\frac{y}{75} - \frac{y}{90} = \frac{1}{5}$$

ಅಥವಾ $y = 90$.

ಈಗ, ಮೂರು ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲ್‌ಗಳ ವೇಗ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ :

90, 75 ಮತ್ತು 72 ಕಿ.ಮೀ./ಗಂಟೆ.

ಸ್ಪರ್ಧಾಪಥದ ಉದ್ದ 90 ಕಿ.ಮೀ.

ಸ್ಪರ್ಧಾಪಥದ ಉದ್ದವನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿನ ವೇಗದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಪಥಕ್ರಮಿಸಲು ತಗಲಿದ ಸಮಯವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಬಹುದು :

ಮೊದಲನೆಯ ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿಗೆ	1 ತಾಸು,
ಎರಡನೆಯ ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿಗೆ	1 ತಾಸು, 12 ನಿಮಿಷಗಳು,
ಮೂರನೆಯ ಮೋಟರ್ ಸೈಕಲಿಗೆ	1 ತಾಸು, 15 ನಿಮಿಷಗಳು.

ಈ ರೀತಿ, ಏಳು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದೇವೆ.

ಸರಾಸರಿ ವೇಗಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಎರಡು ನಗರಗಳ ನಡುವಣ ದೂರವನ್ನು ವಾಹನವೊಂದು ಗಂಟೆಗೆ 60 ಕಿ.ಮೀ. ವೇಗದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ; ಹಿಂತಿರುಗುವಾಗ ಚಾಲಕನು ಗಂಟೆಗೆ 40 ಕಿ.ಮೀ. ವೇಗದಲ್ಲಿ ಸಾಗುತ್ತಾನೆ. ಸರಾಸರಿ ವೇಗ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ.

ಉತ್ತರ :

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸರಳತೆ ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ತಪ್ಪಿಸುತ್ತದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಆಳವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸದೆ, ಹಲವರು 60 ಮತ್ತು 40ರ ಸರಾಸರಿ (ಅಂಕಗಣಿತೀಯ ಸರಾಸರಿ) ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ, ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧ ಬೆಲೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ :

$$\frac{60+40}{2} = 50.$$

ನಗರಕ್ಕೆ ಹೋಗುವ ಮತ್ತು ಹಿಂತಿರುಗುವ ಪ್ರಯಾಣಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಸಮಯ ತಗಲಿದ್ದರೆ ಈ "ಸರಳ" ಉತ್ತರ ಸರಿ. ಆದರೆ, ಹಿಂತಿರುಗುವ ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ (ಕಡಿಮೆ ವೇಗದಲ್ಲಿ) ಹೋಗುವ ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಸಮಯ ತಗಲಿತೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ, ಇದರ ಉತ್ತರ 50 ಅಲ್ಲ ಅಂತ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

ನಿಜ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, ಸಮೀಕರಣವೊಂದನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ ಬೇರೆಯೇ ಉತ್ತರ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದವೊಂದನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ರಚಿಸಬಹುದು. ನಗರಗಳ ನಡುವಣ ದೂರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಈ ಅಪರಿಚಿತಾಂಶ l ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ, ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸರಾಸರಿ ದೂರವನ್ನು x ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣ ದೊರಕುತ್ತದೆ :

$$\frac{2l}{x} = \frac{l}{60} + \frac{l}{40}.$$

ಇದರಲ್ಲಿ, l ನ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣದ ಭಾಗಗಳನ್ನೆಲ್ಲ l ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{60} + \frac{1}{40}$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$x = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}} = 48.$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ ಗಂಟೆಗೆ 48 ಕಿ.ಮೀ. (ಗಂಟೆಗೆ 50 ಕಿ.ಮೀ. ಸರಿಯಲ್ಲ).

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಂಕೇತಗಳ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿದರೆ, ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣ (ನಗರಕ್ಕೆ ಹೋಗುವ ವೇಗವನ್ನು ಗಂಟೆಗೆ 'a' ಕಿಮೀಗಳೆಂದೂ, ನಗರದಿಂದ ಹಿಂತಿರುಗುವ ವೇಗವನ್ನು 'b' ಕಿ.ಮೀ.ಗಳೆಂದೂ ಸೂಚಿಸಿ) :

$$\frac{2l}{x} = \frac{l}{a} + \frac{l}{b}$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$x = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

ಈ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು a ಮತ್ತು b ಯ ಸಂಗತ ಸರಾಸರಿ *Harmonic Mean* (ಅಥವಾ *ಸಂಗತ ಮಧ್ಯಮ*) ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸರಾಸರಿ ವೇಗವು ಅಂಕಗಣಿತೀಯ ಸರಾಸರಿಯಲ್ಲ; ಅದು ವೇಗಗಳ ಸಂಗತ ಸರಾಸರಿ. ಅದಲ್ಲದೆ, a ಮತ್ತು b ಯ ಬೆಲೆ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದಾಗ, ಸಂಗತ ಸರಾಸರಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಅಂಕಗಣಿತೀಯ ಸರಾಸರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ :

$$\frac{a+b}{2}$$

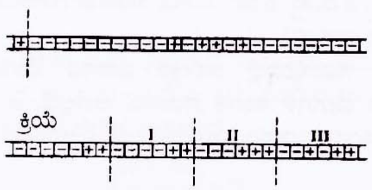
ಇದನ್ನು ನಾವು ಈಗಷ್ಟೇ ಗಮನಿಸಿದ್ದೇವೆ (50 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ 48).

ಅತಿವೇಗದ ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳು

ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕಲಿಯುತ್ತಾ, ಅದನ್ನು ರಚಿಸುವ ಹಾಗೂ ಬಿಡಿಸುವ ಮೋಜನ್ನು ಈವರೆಗೆ ಸವಿದೆವು. ಈಗ ಗಣಕಯಂತ್ರ (ಕಂಪ್ಯೂಟರ್)ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯೋಣ. ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳಿಗೆ ಚದುರಂಗ, ಚೆಕರ್ಸ್, ಡ್ರಾಫ್ಟ್ ಆಟಗಳನ್ನಾಡಲು ಕಲಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಒಂದು ಭಾಷೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸುವ (ಈ ಭಾಷಾಂತರದಲ್ಲಿ ಹಲವು ಕುಂದು ಕೊರತೆಗಳಿರುತ್ತವೆ). ಸಂಗೀತದ ತುಣುಕೊಂದನ್ನು ವಾದ್ಯಮೇಳ (ಆರ್ಕೆಸ್ಟ್ರಾ) ಕ್ಕೆ ಅಳವಡಿಸುವ ಹಾಗೂ ಇದಕ್ಕಿಂತ ಕಠಿಣವಾದ ಕೆಲಸಗಳನ್ನೂ ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳು ಮಾಡಬಲ್ಲವು. ಇವನ್ನೆಲ್ಲ ಗಣಕಯಂತ್ರದಿಂದ ಮಾಡಿಸಲು ನಾವು ಮಾಡಬೇಕಾದ ಒಂದೇ ಒಂದು ಕೆಲಸ: ಗಣಕಯಂತ್ರ ಅನುಸರಿಸಬಲ್ಲ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ (ತಂತ್ರಾಂಶ) ರಚಿಸುವುದು.

ಚದುರಂಗದಾಟವಾಡುವ ಮತ್ತು ಒಂದು ಭಾಷೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸುವ ತಂತ್ರಾಂಶಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವೀಗ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಬೇಡ; ಅವು ಬಹಳ ಕ್ಲಿಷ್ಟ. ನಾವು ಬಹಳ ಸರಳವಾದ, ಕೇವಲ ಎರಡೇ ಎರಡು ತಂತ್ರಾಂಶಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸೋಣ. ಆ ಮುನ್ನ, ಗಣಕ ಯಂತ್ರಗಳ ರಚನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸೂಕ್ತ.

ಮೊದಲನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಹಲವು ಸಾವಿರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು (ಮಿಲಿಯಗಟ್ಟಲೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು) ಮಾಡಬಲ್ಲ ಯಂತ್ರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಗಣಕಯಂತ್ರದ ಭಾಗವನ್ನು *ಅಂಕಗಣಿತ ಘಟಕ* ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಇಡೀ ಯಂತ್ರದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಸಂಘಟಿಸುವ *ನಿಯಂತ್ರಕ ಘಟಕವನ್ನೂ*, *ಸ್ಮರಣ ಘಟಕ (Storage)* (ಇದನ್ನು *ಶೇಖರಣಾ ಘಟಕ* ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ)ವನ್ನೂ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಸ್ಮರಣ ವಿಭಾಗವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ರೂಢಿಯ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನೂ ಶೇಖರಿಸಿಡುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲದೆ, ಹೊಸ ಅಂಕೆ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದತ್ತಾಂಶವನ್ನು ಒಳಗಿಳಿಸುವ (Input) ಹಾಗೂ ಅಂತಿಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊರಕಳಿಸುವ (Output) ಸಾಧನಗಳನ್ನೂ ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳಿಗೆ ಜೋಡಿಸಲಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ವಿಶೇಷ ರೀತಿಯ ಕಾರ್ಡುಗಳಲ್ಲಿ ದಶಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿತ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. (ಈ ಪುಸ್ತಕ ಬರೆದಾಗ ಇದ್ದ ಪದ್ಧತಿ ಈಗಿನ ಕಂಪ್ಯೂಟರುಗಳಲ್ಲಿ ಇದಕ್ಕಿಂತ ಮುಂದುವರೆದ ಪದ್ಧತಿಗಳಿವೆ. ಈ ಕಾರ್ಡು ಪದ್ಧತಿ ಇಲ್ಲ).



ಚಿತ್ರ 18

ಧ್ವನಿಯನ್ನು ಧ್ವನಿ ತಟ್ಟೆಗಳು ಅಥವಾ ಧ್ವನಿ ಸುರುಳಿಗಳಲ್ಲಿ ಧ್ವನಿ ಮುದ್ರಿಸಿ, ಅನಂತರ ಹೇಗೆ ಪುನರುತ್ಪಾದಿಸಬಹುದೆಂದು ನಮಗೆಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದರೆ, ಧ್ವನಿಯನ್ನು ಒಮ್ಮೆ ಮಾತ್ರ ಧ್ವನಿ ಮುದ್ರಿಸಬಹುದು. ಹೊಸದಾಗಿ ಧ್ವನಿ ಮುದ್ರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಹೊಸ ಡಿಸ್ಕು ಅವಶ್ಯ. ಧ್ವನಿ ಮುದ್ರಕವು ಇದೇ ಕೆಲಸವನ್ನು ಬೇರೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಧ್ವನಿ ಸುರುಳಿಯನ್ನು ಅಯಸ್ಕಾಂತೀಯಗೊಳಿಸುವ ಮೂಲಕ. ಇದರಲ್ಲಿ ಧ್ವನಿ ಮುದ್ರಿಸಿದ ಧ್ವನಿಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಬೇಕಾದರೂ ಪುನರುತ್ಪಾದಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಧ್ವನಿ ಮುದ್ರಣವು ಅನಗತ್ಯವೆನಿಸಿದರೆ ಅದನ್ನು ಅಳಿಸಿ, ಅದರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲೇ ಹೊಸ ಧ್ವನಿ ಮುದ್ರಣ ಮಾಡಬಹುದು. ಒಂದೇ ಧ್ವನಿ ಸುರುಳಿಯನ್ನು ಹಲವು ಧ್ವನಿ ಸರಣಿಗಳನ್ನು ಮುದ್ರಿಸಲು ಬಳಸಬಹುದು; ಪ್ರತಿ ಬಾರಿ ಹೊಸದಾಗಿ ಧ್ವನಿ ಮುದ್ರಿಸಿದಾಗಲೂ ಹಳೆಯ ಧ್ವನಿ ಮುದ್ರಣ ಅಳಿಸಿ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯ ತತ್ವವನ್ನು ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳ ಸ್ಮರಣ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ವಿಶೇಷ ರೀತಿಯ ಡ್ರಂ, ಸುರುಳಿ ಅಥವಾ ಇತರ ಪರಿಕರಗಳ ಮೇಲೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ, ಗಣಿತ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನೂ ವಿದ್ಯುತ್, ಅಯಸ್ಕಾಂತೀಯ ಅಥವಾ ಯಾಂತ್ರಿಕ ಸಂಜ್ಞೆಗಳ ಮೂಲಕ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಮುದ್ರಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯಾವಾಗ ಬೇಕಾದರೂ "ಓದ" ಬಹುದು ಮತ್ತು ಅದು ಅನಗತ್ಯವಾದರೆ, ಅದನ್ನು ಅಳಿಸಿ, ಅದರ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆ ಮುದ್ರಿಸಬಹುದು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ದಾಖಲಿಸುವ (ಶೇಖರಿಸುವ) ಮತ್ತು ಓದುವ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನ ಮಿಲಿಯದೊಂದು ಭಾಗದ ಸಮಯವಷ್ಟೇ ತಗಲುತ್ತದೆ.

ಗಣಕಯಂತ್ರದ ಸ್ಮರಣೆಯು ಹಲವು ಸಾವಿರ ಶೇಖರಣಾ ಸ್ಥಾನ (ಸ್ಮರಣ ಕೋಶ) ಗಳನ್ನೂ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ಥಾನವೂ ಅನೇಕ ಚಿಪ್‌ಗಳನ್ನೂ ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ದ್ವಿಮಾನ (ದ್ವಿಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿ)ದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ 1ನ್ನೂ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು '0' ಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತದೆಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಸ್ಮರಣ ಘಟಕದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶೇಖರಣಾ ಘಟಕದಲ್ಲಿ 25 ಕೋಶಗಳಿವೆ ಎಂದಿರಲಿ. (ಅಥವಾ, ವಾಡಿಕೆಯ ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ 25 ದ್ವಿಮಾನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು); ಶೇಖರಣಾ ಘಟಕದ ಮೊದಲನೆಯ (ಕಿರುಸ್ಥಾನ) ಸಂಖ್ಯೆ ಚಿಹ್ನೆ (+ ಅಥವಾ –) ಯನ್ನು ಮುಂದಿನ 14 ಕೋಶಗಳು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು, ಕೊನೆಯ 10 ಕೋಶಗಳು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಭಾಗಗಳನ್ನೂ ಗುರುತಿಸಲು ಬಳಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಗಣಕಯಂತ್ರದ ಸ್ಮರಣ ಘಟಕದ ಎರಡು ಶೇಖರಣಾ ಕೋಶಗಳ ಚಿತ್ರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 18ರಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು; ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಸಂಗ್ರಹಣಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ 25 ಧಾತುಗಳು. ಅಯಸ್ಕಾಂತಗೊಂಡ ಕೋಶವನ್ನು "+" ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದಲೂ, ಅಯಸ್ಕಾಂತಗೊಳ್ಳದ ಕೋಶವನ್ನು "–" ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲ್ಗಡೆಯ ಶೇಖರಣಾ ಕೋಶಗಳನ್ನೂ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ (ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಭಾಗವು ಎಲ್ಲಿ ಆರಂಭವಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಒಂದು ಬಿಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ; ಸಂಖ್ಯೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಮೊದಲನೆಯ ಕೋಶವನ್ನು ತುಂಡು ಗೆರೆಗಳ ರೇಖೆಯೊಂದು ಇತರ ಕೋಶಗಳಿಂದ ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸುತ್ತದೆ). ದ್ವಿಮಾನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ +1011.01 ಅಥವಾ ಸಾಮಾನ್ಯ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ 11.25 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಿಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ತಂತ್ರಾಂಶದ ಆದೇಶಗಳನ್ನು ಮುದ್ರಿಸಲಿಕ್ಕೂ ಸ್ಮರಣ ಕೋಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೂರು-ಸ್ಮರಣ ಕೋಶಗಳ ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳು (ಚಿತ್ರ 18) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವ ಗಣಕ ಯಂತ್ರಗಳಿಗೆ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಆದೇಶಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು

ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಆದೇಶವನ್ನು ಮುದ್ರಿಸಲು ಶೇಖರಣಾ ಘಟಕವನ್ನು 4 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 18ರಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಡೆಯ ಶೇಖರಣಾ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ತುಂಡುಗೆರೆಗಳ ಊರ್ಧ್ವ ರೇಖೆಗಳ ಮೂಲಕ ಈ ರೀತಿ ವಿಭಾಗಿಸಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು). ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗವು ಯಾವ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಮಾಡಬೇಕೆಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ (ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ).

ಸಂಕಲನ – ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆ 1,
ವ್ಯವಕಲನ – ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆ 2,
ಗುಣಾಕಾರ – ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆ 3, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಸಂಕೇತ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಆದೇಶಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಅರ್ಥೈಸಬೇಕು : ಶೇಖರಣಾ ಕೋಶಗಳ ಮೊದಲ ಭಾಗ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ; ಎರಡನೆಯ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಭಾಗಗಳು ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಮಾಡಲು ಯಾವ ಯಾವ ಶೇಖರಣಾ ಕೋಶಗಳಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎತ್ತಿಕೊಳ್ಳಬೇಕೋ ಅವುಗಳ ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ; ನಾಲ್ಕನೆಯ ಭಾಗವು, ಅಂತಿಮ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಕಳಿಸಬೇಕಾದ ಶೇಖರಣಾ ಕೋಶದ ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚಿತ್ರ 18ರಲ್ಲಿ (ಕೆಳಗಿನ ಸಾಲು), ದ್ವಿಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ 11, 11, 111, 1011 ಅಥವಾ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯ 3, 3, 7, 11 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ; ಇವುಗಳ ಅರ್ಥ: 3ನೆಯ ಮತ್ತು 7ನೆಯ ಸ್ಮರಣ ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ 3 (ಅಂದರೆ ಗುಣಾಕಾರ) ಮಾಡಿ, ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು 11ನೆಯ ಸ್ಮರಣಕೋಶದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸ (ಶೇಖರಿಸ) ಬೇಕು.

ಇನ್ನು ಮುಂದೆ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ಆದೇಶಗಳನ್ನೂ ನೇರವಾಗಿ ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ (ಚಿತ್ರ 18ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳಿಗೆ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸುವುದರ ಬದಲಾಗಿ). ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚಿತ್ರ 18ರ ಕೆಳಗಡೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸಿದ ಆದೇಶಗಳು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯುವುದು :

ಗುಣಾಕಾರ 3 7 11

ಈಗ ನಾವು ತೀರಾ ಸರಳವಾದ 2 ಪ್ರೋಗ್ರಾಂಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ 1

1)	ಸಂಕಲನ	4	5	4
2)	ಗುಣಾಕಾರ	4	4	→
3)	ನಿಯಂತ್ರಣಾದೇಶಗಳ ವರ್ಗಾವಣೆ		1	
4)	0			
5)	1			

ಸ್ಮರಣ ಘಟಕದ ಮೊದಲ ಐದು ಶೇಖರಣಾ ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾದ ಈ ಆದೇಶಗಳ ಮೂಲಕ ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಹೇಗೆ ಗಣನೆ ಮಾಡುತ್ತದೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

1ನೆಯ ಆದೇಶ : 4ನೆಯ ಮತ್ತು 5ನೆಯ ಸ್ಮರಣ ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು 4ನೆಯ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಕಳಿಸಬೇಕು (4ನೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಿರುವುದರ ಬದಲಾಗಿ). ಈ ರೀತಿ, ಗಣಕಯಂತ್ರವು 0+1 = 1 ಅಂಕೆಯನ್ನು 4ನೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸುತ್ತದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಆದೇಶದ ಪ್ರಕಾರ ಗಣನೆ ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ,

4ನೆಯ ಮತ್ತು 5ನೆಯ ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳಿರುತ್ತವೆ :

4) 1,
5) 1.

2ನೆಯ ಆದೇಶ : 4ನೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಯನ್ನು ಅದರಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿ (ಅದರ ವರ್ಗ), ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು, ಅಥವಾ 1^2 ನ್ನು, ಕಾರ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಬೇಕು (ಬಾಣ ಗುರುತಿನ ಆದೇಶ ಅಂತಿಮ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಮುದ್ರಿಸಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬೇಕೆಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ). (ಕಂಪ್ಯೂಟರ್‌ಗಳ ಮೊದಲ ಆವೃತ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿತ ಕಾರ್ಡುಗಳಿದ್ದವು, ಈಗ ಹೀಗಿಲ್ಲ).

3ನೆಯ ಆದೇಶ : 1ನೆಯ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ನಿಯಂತ್ರಣಾದೇಶಗಳ ವರ್ಗಾವಣೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಆದೇಶದಿಂದ ತೊಡಗಿ, ಎಲ್ಲ ಆದೇಶಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಪುನಃ ಗಣನೆ ಮಾಡಬೇಕೆಂಬುದೇ "ನಿಯಂತ್ರಣಾದೇಶಗಳ ವರ್ಗಾವಣೆ" ಎಂಬುದರರ್ಥ. ಆದ್ದರಿಂದ, 1ನೆಯ ಆದೇಶದಿಂದ ಪುನಃ ತೊಡಗಬೇಕಾಗಿದೆ.

1ನೆಯ ಆದೇಶ : 4ನೆಯ ಮತ್ತು 5ನೆಯ ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪುನಃ 4ನೆಯ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಕಳಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕಾರ, 4ನೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲ್ಪಡುವ ಅಂಕೆ $1 + 1 = 2$:

4) 2,
5) 1.

2ನೆಯ ಆದೇಶ : 4ನೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಯ ವರ್ಗ ರೂಪಿಸಿ, ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು, ಅಥವಾ 2^2 ನ್ನು, ಕಾರ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಬೇಕು (ಬಾಣ ಗುರುತು ಮುದ್ರಿಸಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಬೇಕೆಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ).

3ನೆಯ ಆದೇಶ : ಮೊದಲನೆಯ ಕೋಶಕ್ಕೆ ನಿಯಂತ್ರಣಾದೇಶಗಳ ವರ್ಗಾವಣೆ (1ನೆಯ ಆದೇಶಕ್ಕೆ ಪುನಃ ವರ್ಗಾವಣೆ ಎಂಬುದೇ ಇದರರ್ಥ).

1ನೆಯ ಆದೇಶ : ಅಂಕೆ $2 + 1 = 3$ನ್ನು 4ನೆಯ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಕಳಿಸಬೇಕು :

4) 3,
5) 1.

2ನೆಯ ಆದೇಶ : ಅಂಕೆ 3^2 ನ್ನು ಮುದ್ರಿಸಬೇಕು.

3ನೆಯ ಆದೇಶ : ಒಂದನೆಯ ಆದೇಶಕ್ಕೆ ನಿಯಂತ್ರಣಾದೇಶಗಳ ವರ್ಗಾವಣೆ ಮತ್ತು ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಯಬೇಕು.

ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಿ, ಕಾರ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸುತ್ತಿದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಶ್ರೇಣಿಯ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೈಯಿಂದ ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ; ಏಕೆಂದರೆ, ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತಾ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವರ್ಗವನ್ನೂ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರೋಗ್ರಾಮನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತಾ, ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ (1 ರಿಂದ 10 000 ತನಕ ಎಂದಿರಲಿ) ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕೆಲವೇ ಸೆಕೆಂಡುಗಳೊಳಗೆ, ಅಥವಾ ಸೆಕೆಂಡಿನ ಕೆಲವೇ ಭಾಗಗಳೊಳಗೆ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ.

ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ, ಈ ಮುನ್ನ ವಿವರಿಸಿರುವುದಕ್ಕಿಂತ ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನದಲ್ಲಿಡಲೇಬೇಕು. ಇದು

ಮುಖ್ಯವಾಗಿ 2ನೆಯ ಆದೇಶಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಗಣಕಯಂತ್ರಕ್ಕೆ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮವನ್ನು ಮಾಡಲು ತಗಲುವುದಕ್ಕಿಂತ ಬಹಳಷ್ಟು ಜಾಸ್ತಿ ಸಮಯ ಅದರ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಕಾರ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲು ತಗಲುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ, ಸ್ಮರಣ ಘಟಕದ ಖಾಲಿ ಶೇಖರಣಾ ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಶೇಖರಿಸಿ, ಬಳಿಕ "ಕೆಲಸದೊತ್ತಡ ಇಲ್ಲದಾಗ" ಅವನ್ನು ಕ್ರಮೇಣ ಕಾರ್ಡುಗಳಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮದ ಅಂತಿಮ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು 1ನೆಯ ಖಾಲಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ, 2ನೆಯ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು 2ನೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿ, ಮೂರನೆಯ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು 3ನೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಇತರ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನೂ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಮುನ್ನ ನೀಡಲಾದ ವಿವರಣೆಯಲ್ಲಿ ಈ ವಿಷಯ ತಿಳಿಸಿಲ್ಲ.

ಇನ್ನೊಂದು ವಿಷಯವನ್ನೂ ಗಮನಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಕೆಲಸದಲ್ಲೇ ಗಣಕಯಂತ್ರವನ್ನು ದೀರ್ಘಕಾಲ ತೊಡಗಿಸುವಂತಿಲ್ಲ; ಏಕೆಂದರೆ ಸ್ಮರಣ ಘಟಕದಲ್ಲಿ ಸಾಕಷ್ಟು ಕೋಶಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ; ಅದಲ್ಲದೆ, ಗಣಕಯಂತ್ರದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕ್ಲುಪ್ತ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ, ಅದು ಸಾಕಷ್ಟು ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಯಾವಾಗ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು "ಊಹಿಸಲು" ಯಾವ ವಿಧಾನವೂ ಇಲ್ಲ (ಗಣಕ ಯಂತ್ರವು ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಹಲವು ಸಾವಿರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಡಿ). ಈ ಸನ್ನಿವೇಶವನ್ನು ನಿಭಾಯಿಸಲಿಕ್ಕಾಗಿ, ಕ್ಲುಪ್ತ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಗಣಕಯಂತ್ರದ ಕೆಲಸ ನಿಲ್ಲಿಸಲು ಸೂಕ್ತ ಆದೇಶಗಳನ್ನು ಪ್ರೋಗ್ರಾಂನಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಗಣಕಯಂತ್ರವು 1 ರಿಂದ 10,000 ತನಕದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದ ಬಳಿಕ ಗಣನೆ ನಿಲ್ಲಿಸಬೇಕೆಂದು ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಆದೇಶಿಸಬಹುದು.

ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ನಾಜೂಕಾದ ಆದೇಶಗಳಿರುತ್ತವೆಂಬುದೇನೋ ನಿಜ; ಆದರೆ, ನಮ್ಮ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಸರಳವಾಗಿಯೇ ಇರಿಸಲಿಕ್ಕಾಗಿ, ನಾವು ಅವನ್ನೆಲ್ಲ ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

1ರಿಂದ 10 000 ತನಕದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕರಾರುವಕ್ಕಾದ ಒಂದು ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಇಲ್ಲಿದೆ :

ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ 1a

1)	ಸಂಕಲನ	8	9	8
2)	ಗುಣಾಕಾರ	8	8	10
3)	ಸಂಕಲನ	2	6	2
4)	ಷರತ್ತುಬದ್ಧ ವರ್ಗಾವಣೆ	8	7	1
5)	ನಿಲುಗಡೆ			
6)		0	0	1
7)	10 000			
8)	0			
9)	1			
10)	0			
11)	0			
12)	0			
...				

ಇದರ ಮೊದಲಿನೆರಡು ಆದೇಶಗಳಿಗೂ, ಈ ಮುನ್ನ ವಿವರಿಸಿದ ಸರಳೀಕೃತ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ನಲ್ಲಿ ಇದ್ದುದಕ್ಕೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನೂ ಇಲ್ಲ. ಈ ಎರಡು ಆದೇಶಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ 8ನೆಯ, 9ನೆಯ ಮತ್ತು 10ನೆಯ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ :

8) 1
9) 1
10) 1^2

ಮೂರನೆಯ ಆದೇಶ : ಬಹಳ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾಗಿದೆ : ಇದರ ಪ್ರಕಾರ, 2ನೆಯ ಮತ್ತು 6ನೆಯ ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿರುವುದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು 2ನೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಈಗ ಎರಡನೆಯ ಕೋಶದ ಆದೇಶ ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ :

2) ಗುಣಾಕಾರ 8 8 11

ಮೂರನೆಯ ಆದೇಶದ ಪ್ರಕಾರ ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ, ಎರಡನೆಯ ಆದೇಶ ಬದಲಾಯಿತು; ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, 2ನೆಯ ಆದೇಶದ ಒಂದು ಸ್ಮರಣ ಕೋಶ ಬದಲಾಯಿತು. ಇದನ್ನು ಯಾಕೆ ಮಾಡಲಾಯಿತೆಂದು ನಮಗೆ ಬೇಗನೇ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಆದೇಶ : ಷರತ್ತುಬದ್ಧ ವರ್ಗಾವಣೆ (ಅಥವಾ ನಿಯಂತ್ರಣಾದೇಶಗಳ ಷರತ್ತು ಬದ್ಧ ವರ್ಗಾವಣೆ); ಈ ಮುಂಚಿನ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂನ 3ನೆಯ ಆದೇಶದ ಬದಲಾಗಿ ಇದನ್ನು ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಆದೇಶದ ಪ್ರಕಾರ ಕಾರ್ಯವೆಸಗುವ ವಿಧಾನ ಹೀಗಿದೆ : 8ನೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 7ನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವುದಕ್ಕಿಂತ ಕಿರಿದಾಗಿದ್ದರೆ. ನಿಯಂತ್ರಣಾದೇಶವು 1ನೆಯ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲವಾದರೆ, ಮುಂದಿನ (5ನೆಯ ಅಂದರೆ ನಿಲುಗಡೆ) ಆದೇಶ ಅನುಸರಿಸಬೇಕು. ಈಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ, $1 < 10000$ ಆದಕಾರಣ, ನಿಯಂತ್ರಣಾದೇಶವು 1ನೆಯ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾವಣೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪುನಃ 1ನೆಯ ಆದೇಶದ ಪ್ರಕಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಒಂದನೆಯ ಆದೇಶದಂತೆ ಗಣನೆ ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ, 8ನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 2 ಮುದ್ರಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಈಗ 2ನೆಯ ಆದೇಶ ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ :

2) ಗುಣಾಕಾರ 8 8 11

ಇದರ ಪ್ರಕಾರ, 2^2ನ್ನು 11ನೆಯ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಕಳಿಸಬೇಕು. ಈ ಮುನ್ನ 3ನೆಯ ಆದೇಶವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿದ್ದು ಏಕೆಂದು ಈಗ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ: ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ಅಂದರೆ 2^2, ಈಗಾಗಲೇ ಭರ್ತಿಯಾಗಿರುವ 10ನೆಯ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ; ಬದಲಾಗಿ ಮುಂದಿನ (11ನೆಯ) ಕೋಶಕ್ಕೆ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಒಂದನೆಯ ಮತ್ತು 2ನೆಯ ಆದೇಶದಂತೆ ಗಣನೆ ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ :

8) 2
9) 1
10) 1^2
11) 2^2

ಮೂರನೆಯ ಆದೇಶದ ಬಳಿಕ, 2ನೆಯ ಕೋಶದ ಆದೇಶ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ :

2) ಗುಣಾಕಾರ 8 8 12

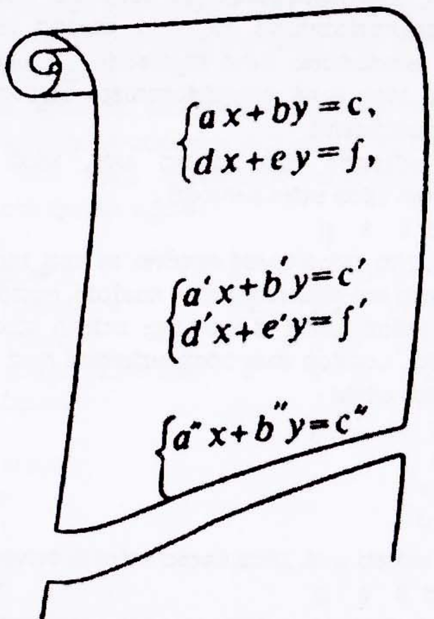
ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಹೊಸ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಮುಂದಿನ, ಅಥವಾ 12ನೆಯ, ಕೋಶದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಿದ್ಧವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಇದರರ್ಥ. ಈಗಲೂ 8ನೆಯ ಕೋಶದ ಸಂಖ್ಯೆಯು

9ನೆಯ ಸ್ಥಾನದ್ದಕ್ಕಿಂತ ಕಿರಿದಾಗಿರುವ ಕಾರಣ, ನಿಯಂತ್ರಣಾದೇಶವು 1ನೆಯ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಪುನಃ ವರ್ಗಾವಣೆಯಾಗಬೇಕೆಂಬುದೇ 4ನೆಯ ಆದೇಶವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, 1ನೆಯ ಮತ್ತು 2ನೆಯ ಆದೇಶದಂತೆ ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು :

8) 3
9) 1
10) 1^2
11) 2^2
12) 3^2

ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಎಷ್ಟರವರೆಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ ? 8ನೆಯ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ 10 000 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ಮೂಡುವ ತನಕ; ಅಂದರೆ, 1 ರಿಂದ 10 000 ತನಕದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವ ತನಕ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ, 4ನೆಯ ಆದೇಶವು ನಿಯಂತ್ರಣಾದೇಶವನ್ನು 1ನೆಯ ಕೋಶಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ (ಏಕೆಂದರೆ 8ನೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 7ನೆಯ ಕೋಶದ್ದಕ್ಕಿಂತ ಕಿರಿದಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ). ನಾಲ್ಕನೆಯ ಆದೇಶದ ಬಳಿಕ, ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಐದನೆಯ ಆದೇಶವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತದೆ. ಐದನೆಯ ಆದೇಶ "ನಿಲುಗಡೆ"ಯಾದ್ದರಿಂದ ಗಣಕಯಂತ್ರ ಗಣನೆ ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 19

ಈಗ, ಇದಕ್ಕಿಂತ ನಾಜೂಕಿನ ಒಂದು ಪ್ರೋಗ್ರಾಂನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಮೂಹವೊಂದರ ಉತ್ತರದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ. ಸರಳೀಕೃತವಾದುದನ್ನೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ಓದುಗರು ಇಚ್ಛಿಸುವುದಾದರೆ ಪೂರ್ತಿ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಹೇಗಿರುತ್ತದೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಬಹುದು.

ಈ ಸಮೀಕರಣ ಸಮೂಹ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

$$\begin{cases} ax+by=c, \\ dx+ey=f. \end{cases}$$

ಇದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಈ ರೀತಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು :

$$x=\frac{ce-bf}{ae-bd}, \quad y=\frac{af-cd}{ae-bd}.$$

ಕೆಲವೇ ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ, ಈ ಸಂಕೇತಾಕ್ಷರಗಳ ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೌಲ್ಯಗಳಿಗೆ ಈ ಸಮೀಕರಣ ಸಮೂಹವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ನಿಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು. ಇಂಥ ಸಾವಿರಾರು ಸಮೀಕರಣ ಸಮೂಹಗಳನ್ನು ಗಣಕಯಂತ್ರವೊಂದು ಒಂದೇ ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬಲ್ಲದು.

ಈ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂದಿರಲಿ. a, b, c, d, e, f, a', b',.... ಈ ಸಂಕೇತಾಕ್ಷರಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೌಲ್ಯಗಳ ಸಮೀಕರಣ ಸಮೂಹಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸೂಕ್ತವಾದ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಇಲ್ಲಿದೆ :

1)	x	28	30	20	14)	+	3	19	3	26)	a
2)	x	27	31	21	15)	+	4	19	4	27)	b
3)	x	26	30	22	16)	+	5	19	5	28)	c
4)	x	27	29	23	17)	+	6	19	6	29)	d
5)	x	26	31	24	18)	ವರ್ಗಾವಣೆ			1	30)	e
6)	x	28	29	25	19)		6	6	0	31)	f
7)	–	20	21	20	20)		0			32)	a′
8)	–	22	23	21	21)		0			33)	b′
9)	–	24	25	22	22)		0			34)	c′
10)	÷	20	21	→	23)		0			35)	d′
11)	÷	22	21	→	24)		0			36)	e′
12)	+	1	19	1	25)		0			37)	f′
13)	+	2	19	2						38)	a″
											...

1ನೆಯ ಆದೇಶ : 28ನೆಯ ಮತ್ತು 30ನೆಯ ಕೋಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿ, ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು 20ನೆಯ ಜಾಗಕ್ಕೆ ಕಳಿಸಬೇಕು. ಬೇರೆ ಮಾತಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, 20ನೆಯ ಕೋಶದಲ್ಲಿ ceಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ದೊರಕುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 2 ರಿಂದ 6ನೆಯ ಆದೇಶದ ತನಕ ಅನುಸರಿಸಬೇಕು. ಇವನ್ನೆಲ್ಲ ಗುಣಿಸಿದ ಬಳಿಕ, 20ರಿಂದ 25ನೆಯ ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು :

20) ce
21) bf
22) ae
23) bd
24) af
25) cd

7ನೆಯ ಆದೇಶ: 20ನೆಯ ಕೋಶದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ 21ನೆಯ ಕೋಶದ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಳೆದು, ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು (ce – bf) ಪುನಃ 20ನೆಯ ಕೋಶಕ್ಕೆ ಕಳಿಸಬೇಕು.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 8ನೆಯ ಮತ್ತು 9ನೆಯ ಆದೇಶ ಅನುಸರಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕಾರ, 20, 21, 22ನೆಯ ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು :

20) ce – bf
21) ae – bd
22) af – cd

10ನೆಯ ಮತ್ತು 11ನೆಯ ಆದೇಶಗಳು: ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಿ, ಕಾರ್ಡಿನಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಬೇಕು. (ಅಂದರೆ ಇವನ್ನು ಅಂತಿಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಾಗಿ ನೀಡಬೇಕು).

$$\frac{ce-bf}{ae-bd} \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \frac{af-cd}{ae-bd}$$

ಇವು, ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಸಮೂಹದಿಂದ ಪಡೆದ ಅಪರಿಚಿತಾಂಶಗಳ ಮೌಲ್ಯಗಳು.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಸಮೂಹವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇನ್ನು ಮುಂದಿನ ಆದೇಶಗಳು ಏಕೆ ಅವಶ್ಯ ? ಈ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂನ ಮುಂದಿನ ಭಾಗವು (12ರಿಂದ 19ನೆಯ ಕೋಶಗಳು) ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಸಮೂಹವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಗಣಕಯಂತ್ರವನ್ನು ಸಜ್ಜುಗೊಳಿಸಲು ಅವಶ್ಯ. ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡಲಾಗುವುದೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. 12ರಿಂದ 17ನೆಯ ಆದೇಶಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಮಾಡಬೇಕಾದುದು : 1 ರಿಂದ 6ನೆಯ ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿರುವುದಕ್ಕೆ 19ನೆಯ ಕೋಶದ್ದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು 1 ರಿಂದ 6ನೆಯ ಕೋಶಗಳಿಗೇ ಕಳಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕಾರ, 17ನೆಯ ಆದೇಶದಂತೆ ಮಾಡಿದ ಬಳಿಕ, ಮೊದಲನೆಯ 6 ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಆದೇಶಗಳು :

1)	x	34	36	20
2)	x	33	37	21
3)	x	32	36	22
4)	x	33	35	23
5)	x	32	37	24
6)	x	34	35	25

18ನೆಯ ಆದೇಶ : ನಿಯಂತ್ರಣಾದೇಶಗಳನ್ನು 1ನೆಯ ಕೋಶಕ್ಕೆ ವರ್ಗಾಯಿಸಬೇಕು. ಮೊದಲ 6 ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿರುವ ಹೊಸ ಆದೇಶಗಳು ಮುಂಚಿನ ಆದೇಶಗಳಿಗಿಂತ ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನವಾಗಿವೆ? ಈ ಕೋಶಗಳ ಮೊದಲ ಎರಡು ಸ್ಥಾನಗಳು 26 ರಿಂದ 31ರ ತನಕದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬದಲಾಗಿ 32 ರಿಂದ 37 ರ ತನಕದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಇದರರ್ಥ ಹೀಗಿದೆ: ಗಣಕಯಂತ್ರವು 32ರಿಂದ 37ರ ತನಕದ ಕೋಶಗಳ (26ರಿಂದ 31ರ ತನಕದ ಕೋಶಗಳ ಬದಲಾಗಿ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಮುಂಚಿನದೇ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಮಾಡುವುದು; ಈ ಹೊಸ ಕೋಶಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಸಮೂಹದ ಸಂಕೇತಾಕ್ಷರಗಳು ಲಭ್ಯವಿವೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣ ಸಮೂಹವನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಮೂರನೆಯದನ್ನೂ, ಅನಂತರ ಮುಂದಿನದನ್ನೂ ಎತ್ತಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಈವರೆಗಿನ ವಿವರಣೆಯಿಂದ, ಪ್ರೋಗ್ರಾಂ ಬರೆಯುವುದೇ ಅತಿ ಮುಖ್ಯ ವಿಷಯ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿದೆ. ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಅಸಹಾಯಕ ಯಂತ್ರ ಹಾಗೂ ಅದಕ್ಕೆ ತಾನಾಗಿಯೇ ಏನನ್ನೂ ಮಾಡಲಾಗದು. ಆದೇಶಗಳುಳ್ಳ ತಂತ್ರಾಂಶವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಅದು ಅನುಸರಿಸಬಲ್ಲದು. ವರ್ಗ ಮೂಲಗಳನ್ನು, ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು, ಸೈನ್ ಫಲನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಕ್ಲಿಷ್ಟ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಹಾಗೂ ಇಂಥ ಹಲವು ಕೆಲಸಗಳನ್ನು ಗಣಕಯಂತ್ರದಿಂದ ಮಾಡಿಸಲು ಸೂಕ್ತ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂಗಳಿವೆ. ನಾವೀಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, ಚದುರಂಗ ಆಡುವ ಹಾಗೂ ಒಂದು ಭಾಷೆಯಿಂದ ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸುವ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂಗಳಿವೆ. ಗಣಕಯಂತ್ರವೊಂದು ಹಲವು ಕೆಲಸಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಮಾಡಬಲ್ಲುದು; ಕೆಲಸ ಜಾಸ್ತಿ ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾದಷ್ಟೂ ಅದರ ಆದೇಶಗಳ ಮೊತ್ತವೂ ಜಾಸ್ತಿ ಮತ್ತು ನಾಜೂಕಿನದಾಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂತಿಮವಾಗಿ *Compiling Routines (ರೂಢಿಗತ ತಂತ್ರಾಂಶಗಳ ಕ್ರೋಡೀಕರಣ)* ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯೋಣ. ಈ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂಗಳ ಮೂಲಕ ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಈ ಹಿಂದಿನ ತಂತ್ರಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ತಾನೇ ಪ್ರೋಗ್ರಾಂಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಲ್ಲುದು. ಪ್ರೋಗ್ರಾಂಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವಿಪರೀತ ಸಮಯ ತಗಲುವ ಕೆಲಸ; ಇದನ್ನು ಸಂಕಲನ ನಿರ್ದೇಶನಗಳ ನೆರವಿನಿಂದ ಬಹಳಷ್ಟು ಸರಳೀಕರಿಸಬಹುದು.

■

ಅಧ್ಯಾಯ – ಮೂರು

ಅಂಕಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಿ ಬೀಜಗಣಿತ

ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ, ಅಂಕಗಣಿತದ ಕೆಲವು ಪ್ರತಿಪಾದನೆಗಳಿಗೆ ಪುಷ್ಟಿ ನೀಡಲು ಅಂಕಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತವು ಬಳಸಬೇಕಾಗುವುದು. ಈ ರೀತಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ನೆರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಗಳಲ್ಲಿ, ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತ ಪರಿಕರ್ಮಗಳ ಹಲವು ನಿಯಮಗಳು, ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕುತೂಹಲಕಾರಿ ಲಕ್ಷಣಗಳು, ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಭಜನೀಯತೆಯ ಷರತ್ತುಗಳು, ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ಸೇರಿವೆ. ಅಂತಹ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಪರಿಶೀಲನೆಗಾಗಿ ಈ ಅಧ್ಯಾಯವು ಮೀಸಲಾಗಿದೆ.

ದಿಢೀರ್ ಗುಣಾಕಾರ

ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ಸಿಡಿಲ ಮರಿಗಳೆಂದು (ಬಾಲ ಪ್ರತಿಭಾವಂತರು ಅಥವಾ ಮಿಂಚಿನ ವೇಗದ ಗಣಕಯಂತ್ರಗಳೆಂದು) ಹೆಸರಾದವರು ಹಲವು ಬಾರಿ ಬೀಜಗಣಿತದ ಸರಳ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ತಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 988ರ ವರ್ಗವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುತ್ತಾರೆ. ಅವರು ಅನುಸರಿಸುವ ವಿಧಾನ ಹೀಗಿದೆ :

$$988 \times 988 = (988 + 12) \times (988 - 12) + 12^2$$
$$= 1000 \times 976 + 144 = 976\,144$$

ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿದಾತನು ನಮಗೆ ಪರಿಚಿತವಾದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜಗಣಿತದ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದಾನೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು.

$$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a+b)(a-b) + b^2.$$

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ನಾವು ಬಾಯಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಬಳಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$27^2 = (27+3)(27-3) + 3^2 = 729,$$
$$63^2 = 66 \times 60 + 3^2 = 3969,$$
$$18^2 = 20 \times 16 + 2^2 = 324,$$
$$37^2 = 40 \times 34 + 3^2 = 1369,$$
$$48^2 = 50 \times 46 + 2^2 = 2304,$$
$$54^2 = 58 \times 50 + 4^2 = 2916.$$

986 ನ್ನು 997 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕಾದಾಗ ಹೀಗೆ ಮಾಡೋಣ :

$$986 \times 997 = (986 - 3) \times 1000 + 3 \times 14 = 983\,042.$$

ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಇರುವ ಆಧಾರಗಳು ಯಾವುವು ? ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಿರಿ :

$$(1000-14) \times (1000-3)$$

ಈ ದ್ವಿಪದಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ ಗುಣಿಸಿ

$$1000 \times 1000 - 1000 \times 14 - 1000 \times 3 + 14 \times 3.$$

ಇದನ್ನು ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಬಾರಿ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ :

$$1000\,(1000 - 14) - 1000 \times 3 + 14 \times 3$$
$$= 1000 \times 986 - 1000 \times 3 + 14 \times 3$$
$$= 1000\,(986 - 3) + 14 \times 3.$$

ಇಲ್ಲಿನ ಕೊನೆಯ ಸಾಲು ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವವರು ಬಳಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ದಶಮ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಏಕಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 10 ಆಗಿರುವಂತಹ ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವ ಸುಲಭವಾದ ವಿಧಾನವೊಂದು ಇಲ್ಲಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕೆಂದಿರಲಿ.

$$783 \times 787$$

ಇವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಗುಣಿಸಿ:

$$78 \times 79 = 6162,\ 3 \times 7 = 21$$

ಈಗ ದೊರೆಯುವ ಉತ್ತರ : 616 221.

ಈ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಆಧಾರವಾದ ತರ್ಕವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ :

$$(780+3)\,(780+7)$$
$$= 780 \times 780 + 780 \times 3 + 780 \times 7 + 3 \times 7$$
$$= 780 \times 780 + 780 \times 10 + 3 \times 7$$
$$= 780\,(780 + 10) + 3 \times 7$$
$$= 780 \times 790 + 21$$
$$= 616\,200 + 21.$$

ಇಂತಹ ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಇನ್ನೊಂದು ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವು ಇನ್ನೂ ಸುಲಭವಾಗಿದೆ.

$$\{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2\}$$
$$783 \times 787 = (785 - 2)\,(785 + 2)$$
$$= 785^2 - 4 = 616\,225 - 4 = 616\,221.$$

ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು 785ರ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

5ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಕ್ಷಿಪ್ರವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡುವ ವಿಧಾನ ಹೀಗಿದೆ :

35^2; $3 \times 4 = 12$. ಉತ್ತರ : 1225.

65^2; $6 \times 7 = 42$. ಉತ್ತರ : 4225.

75^2; $7 \times 8 = 56$. ಉತ್ತರ : 5625.

ಇದರ ನಿಯಮ: ದಶಮ ಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಅದನ್ನೇ ಗುಣಿಸಿ; ಈಗ ದೊರಕುವ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ 25ನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಈ ಉಪಾಯಕ್ಕೆ ಆಧಾರವಾದ ತರ್ಕ ಹೀಗಿದೆ: ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ದಶಕಗಳು (ದಶಮ ಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆ) 'a' ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$10a+5.$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ (ದ್ವಿಪದದ ವರ್ಗ) :

$$100a^2+100a+25=100a(a+1)+25.$$

ಇಲ್ಲಿ, $a(a+1)$ ಅಪವರ್ತನದ ಬೆಲೆಯು ದಶಮ ಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಅದಕ್ಕೆ ಅತಿ ಹತ್ತಿರವಾದ ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ (ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಕೂಡಿಸಿದಾಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆ) ಯ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮ. ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೂರರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಅದಕ್ಕೆ 25ನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದು, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಲ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ 25ನ್ನು ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಇದೇ ವಿಧಾನದಿಂದ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ $^1/_2$ – ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸುಲಭ ಕ್ರಮವನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2=3.5^2=12.25=12\frac{1}{4},$$

$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2=56\frac{1}{4},\ \left(8\frac{1}{2}\right)^2=72\frac{1}{4}$$ ಇತ್ಯಾದಿ.

1, 5 ಹಾಗೂ 6 ಅಂಕಿಗಳು

ಒಂದು ಅಥವಾ 5 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯೊಂದನ್ನು ಗುಣಿಸುವಾಗ, ಗುಣಲಬ್ಧದ ಕೊನೆಯಂಕಿಯೂ 1 ಅಥವಾ 5 ಆಗಿರುವುದು ನಿಮ್ಮ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬಂದಿರಬಹುದು. ಅಂಕಿ 6 ಕ್ಕೂ ಈ ನಿಯಮ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆಂಬುದು ಬಹಳ ಜನರಿಗೆ ತಿಳಿದಿಲ್ಲ. ಸಾಂದರ್ಭಿಕವಾಗಿ, 6 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯಾವ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದರೂ ಲಭಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 6 ರಿಂದಲೇ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $46^2 = 2116$, $46^3 = 97\,336$.

1, 5 ಮತ್ತು 6ರ ಈ ವಿಶೇಷ ಗುಣವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ ವಿವರಿಸಬಹುದು. ಈಗ 6ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

6 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

$10a+6, 10b+6$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಗಳು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಅಂತಹ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ:

$$\begin{aligned}&100ab+60b+60a+36\\&=10(10ab+6b+6a)+30+6\\&=10(10ab+6b+6a+3)+6.\end{aligned}$$

ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಕಗಳು ಹಾಗೂ 6, ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ; ಇದರಿಂದಾಗಿ 6 ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

1 ಮತ್ತು 5 – ಈ ಅಂಕೆಗಳಿಗೂ ಇದೇ ರೀತಿಯ ಪುರಾವೆ ಒದಗಿಸಬಹುದು.

ಈ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯಿಂದಾಗಿ, ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ನಿಜವೆಂದು ಸಾಬೀತಾಗುತ್ತದೆ :

386^{2567} – ಇದು 6 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ,

815^{723} – ಇದು 5 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ,

491^{1732} – ಇದು 1 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಇಂತಹ ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀಡಬಹುದು.

25 ಮತ್ತು 76 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

1, 5 ಹಾಗೂ 6ರ ವಿಶೇಷ ಗುಣವನ್ನೇ ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಇವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲೊಂದು 25. ಇನ್ನೊಂದು, ಹೆಚ್ಚಿನ ಓದುಗರಿಗೆ ಅಚ್ಚರಿ ತರಬಹುದಾದಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆ – 76. ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 76ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆಯಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 76ರಿಂದಲೇ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

ಈ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸೋಣ. ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ :

$100a+76, 100b+76$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಅಂತಹ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಉತ್ತರ :

$$\begin{aligned}&10\,000ab+7\,600b+7\,600a+5776\\&=10\,000ab+7600b+7600a+5700+76\\&=100(100ab+76b+76a+57)+76.\end{aligned}$$

ಈ ಸ್ಪಷ್ಟನೆಯಿಂದ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸಾಬೀತಾಗಿದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಗುಣಲಬ್ಧವು 76ರಿಂದಲೇ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

76ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯಾವ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದರೂ ಲಭಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 76 ರಿಂದಲೇ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

$376^2 = 141\,376$

$576^3 = 191\,102\,976$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಅನಂತ "ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು"

ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಗಳು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳಲ್ಲೂ ಕಂಡುಬರುತ್ತವೆ. ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಗಳು ಅನಂತವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನೀಗ ಸಾಬೀತು ಮಾಡೋಣ.

ಈ ಗುಣವನ್ನುಳ್ಳ ಎರಡಂಕೆಯ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಗಳು ನಮಗೀಗಾಗಲೆ ಪರಿಚಿತವಾಗಿವೆ – 25 ಮತ್ತು 76. ಇಂತಹ ಗುಣವುಳ್ಳ ಮೂರಂಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆ ಮಾಡಲು 25 ಅಥವಾ 76ರ ಹಿಂದೆ ಒಂದಂಕಿಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ; ಹಾಗೆ ಸೇರಿಸುವಾಗ, ಮೂರಂಕಿಗಳ ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯಾಸರಣಿಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗುಣ ಪಡೆಯುವಂತಾಗಲಿ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, 76ರ ಹಿಂದೆ ಸೇರಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಕೆ ಯಾವುದು ? ಅದು k ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ಲಭಿಸುವ ಮೂರಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ : $100k+76$.

ಇಂತಹ ಮೂರಂಕಿಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪ ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ :

$1000a+100k+76$

$1000b+100k+76$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಈ ರೀತಿಯ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಉತ್ತರ :

$1000000ab+100000ak+100000bk+76000a+76000b$

$+10000k^2+15200k+5\,776.$

ಈ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರ ರೂಪ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯಾ ಪುಂಜಗಳ ಹೊರತಾಗಿ, ಉಳಿದವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಮೂರು ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ ಗುಣಲಬ್ಧವು 100 k + 76 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು (ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯಾ ಪುಂಜಗಳಿಂದ ಇದನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಸಿಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ) 1000 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು :

$15200k+5776-(100k+76)$

$=15100k+5700$

$=15000k+5000+100(k+7)$

$k=3$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಇದು 1000 ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಮೂರಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 376. ಅಂದರೆ, 376 ಅನ್ನು ಯಾವ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದರೂ ಲಭಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ 376 ರಿಂದಲೇ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$376^2 = 141\,376.$

ಇದೇ ಗುಣವನ್ನುಳ್ಳ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ 376ರ ಹಿಂದೆ ಮತ್ತೊಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಆ ಅಂಕಿ 1 ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆ ದೊರಕುವುದು.

$(10000a+1000l+376)(10000b+1000l+376)$

ಈ ಬೀಜಗಣಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು $(1000l+376)$ ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ l ನ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು? ಈ ಗುಣಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಆವರಣಗಳನ್ನು ಕಳಚಿ, ನಾಲ್ಕು ಹಾಗೂ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸೊನ್ನೆಗಳಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಪುಂಜಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ತೆಗೆದರೆ ಉಳಿಯುವ ಉತ್ತರ :

$752000l+141376.$

ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವು $1000l+376$ ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 10 000 ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು :

$752000l+141376-(1000l+376)$

$=751000l+141000$

$=(750000l+140000)+1000(l+1)$

$l=9$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಇದು 10 000 ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಆದ್ದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ನಾಲ್ಕಂಕಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಿಂದೆ ಇನ್ನೊಂದು ಅಂಕಿಯನ್ನು ಸೇರಿಸಬಹುದು. ಈಗ ನಮಗೆ ದೊರಕುವ ಸಂಖ್ಯೆ 09 376. ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಇನ್ನೂ

ಮುಂದುವರಿಸಿ ಈ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸುತ್ತಾ 109 376, 7109 376 ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋಗಬಹುದು.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯ ಎಡಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೊಂದು ಸೂಕ್ತ ಅಂಕಿ ಸೇರಿಸುವುದನ್ನು ಅನಂತವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ *ಅನಂತ* ಅಂಕಿಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದು ದೊರಕುತ್ತದೆ.

... 7 109 376.

ಇಂತಹ "ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು" ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನೇ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು ಹಾಗೂ ಗುಣಿಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಹಾಗೂ ಕೂಡಿಸುವ ಮತ್ತು ಗುಣಿಸುವ ಕ್ರಿಯೆಗಳೂ ಸಹ ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಜರಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇಂತಹ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಒಂದು ಅಂಕೆಯ ಅನಂತರ ಇನ್ನೊಂದರಂತೆ ನಾವು ಇಚ್ಛಿಸುವಷ್ಟು ಅಂಕೆಗಳವರೆಗೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುತ್ತಾ ಹೋಗಬಹುದು.

ಈ ಮೇಲಿನ ಅನಂತ "ಸಂಖ್ಯೆ"ಯು, ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಅಚ್ಚರಿಯ ಸಂಗತಿ :

$x^2=x.$

ಈ "ಸಂಖ್ಯೆ"ಯ ವರ್ಗವು (ಅಂದರೆ ಇದನ್ನು ಇದರಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಗುಣಲಬ್ಧ) 76ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದು. ಏಕೆಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಕವೂ 76ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ, ಈ "ಸಂಖ್ಯೆ"ಯ ವರ್ಗವು 376ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ 9376 ರಿಂದ ಕೊನೆಯಾಗುವುದು ಮತ್ತು ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ, $x = \ldots 7\,109\,376$ ಆಗಿರುವಾಗ; ಒಂದಾದ ಬಳಿಕ ಇನ್ನೊದರಂತೆ x^2 "ಸಂಖ್ಯೆ"ಯ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆ, x ನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ ಆವರ್ತಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x^2=x$.

ನಾವು 76 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಅಂಕೆಗಳ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದೆವು.* ಇದೇ ತರ್ಕ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ, 5 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವ ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆ ಮಾಡಬಹುದು; ಆ ಪ್ರಕಾರ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಗಳು:

5, 25, 625, 0625, 90 625, 890 625, 2 890 625 ಇತ್ಯಾದಿ. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ಇನ್ನೊಂದು ಅನಂತ "ಸಂಖ್ಯೆ"ಯನ್ನು ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

... 2 890 625

ಇದೂ $x^2=x$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಅನಂತ "ಸಂಖ್ಯೆ"ಯು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು :

---

* ಈ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ ತರ್ಕ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿ 76 ಎಂಬ ಎರಡಂಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಿಂದ ದೊರಕುವ ಎರಡಂಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗುಣವಿರಬೇಕಾದರೆ 6ರ ಎಡಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದೆಂದು ಪತ್ತೆ ಮಾಡಿದರಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ, 6ರ ಎಡಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ತ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಒಂದಾದ ಬಳಿಕ ಇನ್ನೊಂದರಂತೆ ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗುವ ಮೂಲಕ... 7 109 376 ಎಂಬ "ಸಂಖ್ಯೆ"ಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$\left(\left(\left(5^{2}\right)^{2}\right)^{2}\right)^{2}$$

ಈ ಅನಂತ "ಸಂಖ್ಯೆ"ಗಳ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಕುತೂಹಲಕಾರಿ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಹೀಗೆ ವಿವರಿಸಬಹುದು. $x^2 = x$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ($x = 0$ ಹಾಗೂ $x = 1$ ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ಉತ್ತರಗಳಲ್ಲದೆ) ಇನ್ನೂ ಎರಡು ಅನಂತ "ಸಂಖ್ಯೆ"ಗಳ ಉತ್ತರಗಳಿವೆ :

$x = \ldots 7\ 109\ 376$ ಮತ್ತು $x = \ldots 2\ 890\ 625$

ಇವುಗಳ ಹೊರತಾಗಿ, (ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ) ಬೇರೆ ಉತ್ತರಗಳಿಲ್ಲ.*

ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಪಾವತಿ

ಒಂದು ಜಾನಪದ ಸಮಸ್ಯೆ :

ಬಹಳ ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ, ಇಬ್ಬರು ದನಗಳ ವ್ಯಾಪಾರಿಗಳು ಎತ್ತುಗಳ ಹಿಂಡೊಂದನ್ನು ಮಾರಿದರು. ಆ ಹಿಂಡಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತುಗಳಿದ್ದವೋ ಅಷ್ಟೇ ರೂ. ಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿ ಎತ್ತಿನ ಬೆಲೆಯಾಗಿ ಪಡೆದರು. ಈ ಹಣದಿಂದ ಪ್ರತಿ ಕುರಿಗೆ 10 ರೂ. ನಂತೆ ತೆತ್ತು ಕುರಿ ಮಂದೆಯನ್ನು ಕುರಿ ಮರಿಯೊಂದನ್ನು ಕೊಂಡರು. ಈ ಮಂದೆಯನ್ನು ಎರಡು ಸಮಭಾಗ ಮಾಡಿದರು. ಆಗ ಒಬ್ಬನಿಗೆ ಒಂದು ಕುರಿ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಸಿಕ್ಕಿತು, ಇನ್ನೊಬ್ಬ ಕುರಿ ಮರಿಯನ್ನೂ, ಮೊದಲನೆಯವನಿಂದ ಕೊಂಚ ಹಣವನ್ನೂ ಪಡೆದನು. ಈ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಹಣ ಎಷ್ಟು ? (ಆ ಮೊತ್ತ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ರೂಪಾಯಿ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು).

ಉತ್ತರ :

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಭಾಷೆಗೆ ತಕ್ಷಣವೇ ಪರಿವರ್ತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಸಮೀಕರಣವೊಂದನ್ನು ರಚಿಸಲಿಕ್ಕೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಮುಕ್ತ ಗಣಿತ ತರ್ಕದ ಮೂಲಕವೇ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಬೇಕು. ಇಲ್ಲೂ ಅಂಕಗಣಿತಕ್ಕೆ ಬೀಜಗಣಿತವು ಸಹಾಯ ಹಸ್ತ ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಇಡೀ ಹಿಂಡನ್ನು ಮಾರಿದ್ದರಿಂದ ದೊರಕಿದ ಮೊತ್ತ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆ. ಏಕೆಂದರೆ, n ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎತ್ತುಗಳಿದ್ದು, ಪ್ರತಿ ಎತ್ತಿಗೂ n ರೂ. ಬೆಲೆಯೇ ದೊರಕಿದೆ. ಇಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬನಿಗೆ ಒಂದು ಕುರಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಸಿಕ್ಕಿತು. ಈ ಪ್ರಕಾರ ಒಟ್ಟು ಕುರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ, n^2 ನಲ್ಲಿರುವ ದಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೂಡ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಏಕಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದು ?

ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ದಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಸವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಏಕಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆಯು 6 ಮಾತ್ರ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಇದರ ಸಮರ್ಥನೆ ಈ ಮುಂದಿನಂತಿದೆ : a ಹತ್ತುಗಳೂ b ಏಕಗಳೂ ಇರುವ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ ಅಥವಾ $(10a + b)^2$ ನ ಬೆಲೆ,

$$100a^2 + 20ab + b^2 = (10a^2 + 2ab) \times 10 + b^2.$$

* ದಶಮಾನ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲದೆ ಇತರ ಸಂಖ್ಯಾ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲೂ ಇಂಥ ಅನಂತ "ಸಂಖ್ಯೆ"ಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ p ಆಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಇಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು p-adic ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ $10a^2 + 2ab$ ಹತ್ತುಗಳಿವೆ. ಜೊತೆಗೆ b^2 ನಲ್ಲು ಕೆಲವು ಹತ್ತುಗಳೂ ಇವೆ. ಆದರೆ $10a^2 + 2ab$ ಎಂಬುದು 2ರಿಂದ ವಿಭಜಿತವಾಗಬಲ್ಲುದು. ಹಾಗಾಗಿ ಅದೊಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $(10a + b)^2$ ನಲ್ಲಿರುವ ಹತ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಸವಾಗಬೇಕಾದರೆ, b^2ನಲ್ಲಿರುವ ಹತ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬೆಸವಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಈಗ, b^2 ಏನೆಂಬುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು ಏಕಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅದು ಈ ಹತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರಬೇಕು :

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.



ಚಿತ್ರ 20

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 16 ಮತ್ತು 36 (ಎರಡೂ 6 ರಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ) ಮಾತ್ರ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕಾದರೆ ಅದು 6 ರಿಂದಲೇ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬೇಕು ಎಂಬುದು ಖಚಿತ :

$$100a^2+20ab+b^2$$

ಈಗ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯುವುದು ಸುಲಭ. ಕುರಿ ಮರಿಗೆ 6 ರೂ. ಬೆಲೆ ಕಟ್ಟಲಾಯಿತೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕುರಿ ಮರಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡವನು ಇನ್ನೊಬ್ಬನಿಗಿಂತ 4 ರೂ. ಕಡಿಮೆ ಹಣ ಪಡೆದಿದ್ದಾನೆ. ಇಬ್ಬರ ಪಾಲೂ ಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಕುರಿ ಮರಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡವನು ಜೊತೆಗಾರನಿಂದ 2 ರೂ. ಪಡೆಯಬೇಕು.

ಈ ಪ್ರಕಾರ ಹೆಚ್ಚುವರಿಯಾಗಿ ಪಾವತಿಯಾಗಬೇಕಾದ ಹಣ 2 ರೂ. ಗಳು.

11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಿಕೆ

ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡದೆ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಜಕದಿಂದ ವಿಭಜಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲು ಬೀಜಗಣಿತವು ಬಹಳ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, ಹಾಗೂ 10ರಿಂದಾಗುವ ಭಾಗಾಕಾರದ ನಿಯಮಗಳು ನಮಗೆಲ್ಲ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಪರಿಚಿತವಾಗಿವೆ. ಈಗ 11ರ ಭಾಗಾಕಾರ ನಿಯಮವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದು ಸರಳ ಹಾಗೂ ಉಪಯುಕ್ತ.

ಹಲವು ಅಂಕೆಗಳ N ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಏಕಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ a, ದಶಮ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ b, ಶತ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ c, ಸಾವಿರದ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ d ಇವೆ, ಎಂದಿರಲಿ. ಅಥವಾ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ :

$$N=a+10b+100c+1000d+...$$
$$=a+10(b+10c+100d+...),$$

ಇಲ್ಲಿ ಚುಕ್ಕೆಗಳಿರುವ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬರುತ್ತವೆ. N ನಿಂದ, 11 ರ ಗುಣಕವಾದ $11(b + 10c + 100d + ...)$, ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯೋಣ. ಈಗ, ಲಭಿಸುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ :

$$a-b-10(c+10d+...),$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಶೇಷವು, N ಅನ್ನು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಶೇಷಕ್ಕೆ ಸಮ. ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ, 11 ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ $11(c+10d+$ ... ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ :

$$a-b+c+10(d+...),$$

ಇದನ್ನು 11ರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ ಮಾಡಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಶೇಷವು, N ಅನ್ನು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಮಾಡಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಶೇಷಕ್ಕೆ ಸಮ. ಇದರಿಂದ, 11 ರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರವಾಗುವ $11(d+ ...)$, ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಳೆಯೋಣ. ಮತ್ತು ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸೋಣ. ಕೊನೆಗೆ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆ :

$$a-b+c-d+...=(a+c+...)-(b+d+...).$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 11ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಶೇಷವು, ಮೂಲಸಂಖ್ಯೆ N ಅನ್ನು 11ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಶೇಷಕ್ಕೆ ಸಮ.

ಇದರಿಂದ 11ರ ಭಾಗಾಕಾರಕ್ಕೆ ನಮಗೊಂದು ಸೂತ್ರ ದೊರಕುವುದು : ಬೆಸಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತದಿಂದ ಸಮಸ್ಥಾನದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ; ಈಗ ಸಿಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 0 ಅಥವಾ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಸಂಖ್ಯೆ (ಋಣ ಅಥವಾ ಧನ) ಯಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11 ರ ಒಂದು ಗುಣಕ; ಇಲ್ಲವಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಈಗ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು 87 635 064 ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

$$8+6+5+6 = 25,$$
$$7+3+0+4 = 14,$$
$$25-14 = 11.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು 11ರಿಂದ ವಿಭಜನೆಗೊಳ್ಳುವುದು.

ಇದಲ್ಲದೆ, 11ರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರಗೊಳ್ಳಬಲ್ಲುದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಇನ್ನೊಂದು ವಿಧಾನವಿದೆ. ದೊಡ್ಡದಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಈ ವಿಧಾನ ಅನುಕೂಲ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ತಲಾ ಎರಡೆರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಗುಂಪುಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುವುದು. ಅನಂತರ ಈ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದು. ಈ ಮೊತ್ತವು 11ರಿಂದ ವಿಭಜನೆಗೊಂಡರೆ, ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು 11 ರ ಗುಣಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ; ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಅದು 11ರ ಗುಣಕವಲ್ಲ. ಈ ನಿಯಮವನ್ನು 528ಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಎರಡಂಕೆಗಳ ಗುಂಪುಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ 28 ಹಾಗೂ 5ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ:

$$5 + 28 = 33.$$

ಇದು 11 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ವಿಭಜನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 528 ಕೂಡ 11ರಿಂದ ವಿಭಜನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

$$528 \div 11 = 48.$$

ಈಗ ನಾವು ಈ ಭಾಗಾಕಾರ ಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ. ಬಹು ಅಂಕಿಗಳ N ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಅಂಕಿಗಳ ಗುಂಪುಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದಾಗ, ಎರಡಂಕಿಗಳ (ಅಥವಾ ಒಂದಂಕೆಯ*) ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಇವನ್ನು ಬಲದಿಂದ ಎಡಕ್ಕೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ a, b, c ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಹೆಸರಿಸೋಣ. ಇದರಿಂದಾಗಿ N ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$N=a+100b+10000c+...$$
$$=a+100(b+100c+...).$$

11 ರಿಂದ ವಿಭಜನೆಯಾಗುವ $99(b + 100c + ...)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು N ನಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ :

$$a+(b+100c+...)=a+b+100(c+...)$$

ಇದನ್ನು 11ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷವು N ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 11ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷಕ್ಕೆ ಸಮ. 11ರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ $99(c + ...)$ ಯನ್ನು ಈ

* N ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕೆಗಳಿದ್ದಾಗ, ಕೊನೆಯದು (ಎಡ ತುದಿಯ ಅಂಕೆ) ಒಂದಂಕೆಯ ಗುಂಪಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಲ್ಲದೆ, 03 ಎಂಬಂತಹ ಗುಂಪನ್ನೂ ಅಂಕೆ 3 ಮಾತ್ರ ಇರುವ ಒಂದಂಕೆಯ ಗುಂಪೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು.

ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆಯೋಣ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸೋಣ. ಅಂತಿಮವಾಗಿ, N ಹಾಗೂ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷಗಳು ಸಮಾನ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

$a+b+c+...$

ಲೈಸನ್ಸ್ ಸಂಖ್ಯೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಮೂವರು ಗಣಿತ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಿರುಗಾಟಕ್ಕೆ ಹೊರಟಿದ್ದಾಗ ಕಾರೊಂದು ರಸ್ತೆ ಚಲನೆಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಉಲ್ಲಂಘಿಸಿದ್ದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರು. ಅವರಲ್ಲಿ ಯಾರೊಬ್ಬರೂ ಕಾರಿನ ಲೈಸನ್ಸ್ ಫಲಕದಲ್ಲಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಿಲ್ಲ (ಅದು ನಾಲ್ಕಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ). ಆದರೂ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಅವರು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೆಲವು ವಿಶೇಷ ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದರು. ಒಬ್ಬನಿಗೆ ಅದರ ಮೊದಲ ಎರಡಂಕೆಗಳು ಸಮಾನ ಎಂಬುದು ನೆನಪಾಯಿತು. ಕೊನೆಯ ಎರಡಂಕೆಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದವು ಎಂದು ಎರಡನೆಯವನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಂಡ. ಮೂರನೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ನಾಲ್ಕಂಕೆಗಳ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗ ಎಂದು ತಿಳಿಸಿದ. ಕಾರಿನ ಫಲಕದ ಮೇಲಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆ ಗುರುತಿಸಲು ಇಷ್ಟು ಮಾಹಿತಿ ಸಾಕೇ ?

ಉತ್ತರ :

ಗುರುತಿಸಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಮೊದಲ (ಹಾಗೂ ಎರಡನೆಯ) ಅಂಕೆಯನ್ನು 'a' ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ; ಮೂರನೆಯ (ಹಾಗೂ ನಾಲ್ಕನೆಯ) ಅಂಕೆ 'b' ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ಆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$1000a+100a+10b+b=1100a+11b$$
$$=11(100a+b).$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆ 11 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅದಲ್ಲದೆ, ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾದ್ದರಿಂದ 11^2 ನಿಂದಲು ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $100a+b$ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ 11ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ 11ರಿಂದ ವಿಭಜನೀಯವೇ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಿಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಮುನ್ನ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲೊಂದನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ $a+b$ ಸಂಖ್ಯೆ 11ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ, a ಮತ್ತು b ಇವೆರಡು 10 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅಂಕೆಯಾದ್ದರಿಂದ,

$$a+b=11$$

ಗುರುತಿಸಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಕೊನೆಯಂಕೆ b ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಕೆಗಳಲ್ಲೊಂದಾಗಿರಲೇಬೇಕು :

0, 1, 4, 5, 6, 9.

ಅಂಕೆ a ಯು $11-b$ಗೆ ಸಮವಾದ್ದರಿಂದ, ಅದು ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರಲೇ ಬೇಕು :

11, 10, 7, 6, 5, 2.

ಇಲ್ಲಿನ ಮೊದಲೆರಡು ಬೆಲೆಗಳು ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಈಗ ಉಳಿಯುವ ಸಾಧ್ಯ ಬೆಲೆಗಳು :

$b=4,\quad a=7;$
$b=5,\quad a=6;$
$b=6,\quad a=5;$
$b=9,\quad a=2.$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಪರವಾನಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕೆಳಗಿನ ನಾಲ್ಕರಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರಲೇಬೇಕು

7744, 6655, 5566, 2299.

ಆದರೆ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗಳಲ್ಲ: 6655 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 5ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾದರೂ 25ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗದು. 5566 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾದರೂ 4ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗದು; ಇದೇ ರೀತಿ $2299 = 121 \times 19$. ಇದೂ ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಉಳಿಯುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಒಂದು: $7744 = 88^2$. ಇದೇ ಲೈಸನ್ಸ್ ಸಂಖ್ಯೆ.

19ರಿಂದ ಭಾಗಾಕಾರ

ಈ ಕೆಳಗಿನ 19ರ ಭಾಗಾಕಾರ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಗಳ ಅಂಕೆ ಮತ್ತು ಏಕಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯ ಇಮ್ಮಡಿಯ ಮೊತ್ತವು 19ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಮಾತ್ರ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ 19ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಉತ್ತರ :

ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ N ಅನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$N=10x+y$$

ಇಲ್ಲಿ x ಹತ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಇದು ದಶಮಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯಲ್ಲ; ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವ ಪೂರ್ಣಹತ್ತುಗಳು ಎಷ್ಟೆಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ). y ಏಕಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನದು 19ರ ಗುಣಕವಾದರೆ ಮಾತ್ರ 19ರಿಂದ N ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ :

$$N'=x+2y$$

ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು, N' ಅನ್ನು 10ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಗುಣಲಬ್ಧದಿಂದ N ಕಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ :

$$10N'-N=10(x+2y)-(10x+y)=19y.$$

ಇದರಿಂದ, N' ಎಂಬುದು 19ರ ಗುಣಕವಾದರೆ, ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂಥ N ಸಂಖ್ಯೆಯು 19ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ :

$$N=10N'-19y$$

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, 19ರಿಂದ N ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂಥ $10N'$ ಸಂಖ್ಯೆಯು 19ರ ಗುಣಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ :

$$10N'=N+19y$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ N' ಎಂಬುದೂ 19ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆಂಬುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ.

ಈಗ 47 045 881 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 19ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆಯೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರದ ಸೂತ್ರ ಅನ್ವಯಿಸಿ :

4 704 588|1
+ 2
4 7045|90
+ 18
4706|3
+ 6
471|2
+4
47|5
+10
5|7
+14
19.

ಈ ಪ್ರಕಾರ 19 ರಿಂದ 19 ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವುದರಿಂದ, ಇದರಂತೆಯೇ 57, 475, 4712, 47 063, 470 459, 4 704 590, 47 045 881 – ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ 19ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ 19 ರಿಂದ ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಸೋಫೀ ಜರ್ಮೆಯಿನ್ ಪ್ರಮೇಯ

ಖ್ಯಾತ ಫ್ರೆಂಚ್ ಗಣಿತಜ್ಞೆ ಸೋಫೀ ಜರ್ಮೆಯಿನ್ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆ ಮುಂದಿದೆ:

$a^4 + 4$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ (a ಯು 1 ಅಲ್ಲವಾದರೆ) ಒಂದು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ (ಅಪವರ್ತನಗಳಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ) ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ.

ಉತ್ತರ :

ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕು:

$$a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^2+2)^2-4a^2=$$

$$=(a^2+2)^2-(2a)^2=(a^2+2-2a)(a^2+2+2a).$$

ಈ ರೀತಿ, $a^4 + 4$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು; ಈ ಎರಡು ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೂ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ ಅಥವಾ 1 ಅಲ್ಲ.* ಆದ್ದರಿಂದ a^4+4 ಒಂದು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ.

* ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ 'a ಯು 1 ಅಲ್ಲವಾದರೆ' ಎಂದಿದೆ. ಇದರಂತೆ $a \neq 1$ ಆದರೆ a ಯು 1 ಅಲ್ಲವಾದರೆ), ಅಪವರ್ತನ $a^2+2-2a=(a^2-2a+1)+1=(a-1)^2+1\neq 1$ (1 ಅಲ್ಲ). ಈ ಪ್ರಕಾರ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೂ 1 ಅಲ್ಲ.

ವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು) ಅನಂತವಾಗಿವೆ. ಇವು ಒಂದನ್ನು ಮೀರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು; ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ 1 ರ ಹೊರತಾಗಿ ಬೇರಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಈ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯು ಈ ರೀತಿ ಮೊದಲಾಗುತ್ತ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.... ಈ ಚುಕ್ಕೆಗಳು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಸರಣಿಯು ಅನಂತವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯ ನಡುನಡುವೆ ಬರುತ್ತಿರುತ್ತವೆ. ಇವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಸ್ತರಿತ ಸಾಲುಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತವೆ. ಇಂಥ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯು ಎಷ್ಟು ದೀರ್ಘವಾಗಿರಬಲ್ಲದು ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಇಲ್ಲದ ಒಂದು ಸಾವಿರ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿ ಪಡೆಯಲಾದೀತೇ ?

ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಣ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ನಮ್ಮ ಕಲ್ಪನೆಗನುಸಾರವಾಗಿ ಹಿಗ್ಗಿಸಬಹುದು (ಇದು ಅಸಂಭವ ಎನಿಸಬಹುದಾದರೂ) ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಅಂತ ಸರಣಿಯ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಮಿತಿ ಇಲ್ಲ. ಅಂತಹ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಸಾವಿರ, ಮಿಲಿಯನ್, ಟ್ರಿಲಿಯನ್ ಹಾಗೂ ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಜಾಸ್ತಿ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರಬಹುದು.

ತರ್ಕದ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು n! ಎಂಬ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಬಳಸೋಣ. ಇದು 1 ರಿಂದ n ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 5 ! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5. ಈಗ, ಈ ಮುಂದಿನ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ, n ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅನುಕ್ರಮ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ :

$[(n+1)!+2], [(n+1)!+3], [(n+1)!+4]...$

$[(n+1)!+n+1]$ ತನಕ.

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆ ಅದರ ಹಿಂದಿನದಕ್ಕಿಂತ 1 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ :

$$(n+1)\,!+2=1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times \ldots \times (n+1)+2$$

ಇದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ, ಏಕೆಂದರೆ, ಇದರ ಎರಡೂ ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಗುಣಕ 2 ಇದೆ. ಅದಲ್ಲದೆ, 2 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ :

$$(n+1)\,!+3=1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (n+1)+3$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪದಗಳಿದ್ದು, ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ 3ರ ಗುಣಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದೂ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಮೂರನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ :

$$(n+1)!+4=1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (n+1)+4$$

ಇದು 4ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಯಾಕೆಂದರೆ 4ರ ಗುಣಕಗಳಾದ ಪದಗಳು ಇದರಲ್ಲಿವೆ.

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ 5ರ ಗುಣಕ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ :

$$(n+1)!+5$$

ಇದೇ ರೀತಿ ತರ್ಕವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು. ಈಗ, ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ, ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಥವಾ ಏಕಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಲ್ಲದೆ, ಅಪವರ್ತನವೊಂದನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಅನುಕ್ರಮವಾದ ಐದು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಬರೆಯಲು ಇಚ್ಛಿಸುವಿರಾದರೆ ಈ ಮೇಲಿನ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ nಗೆ 5 ಅನ್ವಯಿಸಿ ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ಶ್ರೇಢಿಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ :

722, 723, 724, 725, 726.

ಐದು ಅನುಕ್ರಮ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿ ಇದೊಂದೇ ಅಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಬೇರೆ ಶ್ರೇಢಿಗಳೂ ಇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

62, 63, 64, 65, 66.

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನೂ ಗಮನಿಸಿ :

24, 25, 26, 27, 28.

ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಹತ್ತು ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯೊಂದನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

ಈ ಮುನ್ನ ವಿವರಿಸಿದಂತೆ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅಪೇಕ್ಷಿತ 10 ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 10 \times 11 + 2 = 39\,916\,802.$$

ಈಗ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಶ್ರೇಢಿಯು ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ :

39 916 802, 39 916 803, 39 916 804... ಇತ್ಯಾದಿ.

ಇವುಗಳಿಗಿಂತ ಸಣ್ಣ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳೂ ಇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 100ರಿಂದ 200ರ ನಡುವೆ 13 ಅನುಕ್ರಮ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯೊಂದಿದೆ :

114, 115, 116, 117 ಇತ್ಯಾದಿ... 126ರ ತನಕ.

ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ

ಅನುಕ್ರಮ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಿಪರೀತ ಉದ್ದದ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಇರಬಹುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದರಿಂದಾಗಿ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿ ಅನಂತವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ತೋರಬಹುದು. ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗಳು ಅನಂತವಾಗಿ ಮುಂದುವರಿಯಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮರ್ಥನೆ, ಆ ಸಂಶಯವನ್ನು ತೊಡೆದು ಹಾಕುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದ ಗ್ರೀಕ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಯೂಕ್ಲಿಡ್ ನಿರೂಪಿಸಿದ ಈ ಸಮರ್ಥನೆ, ಅವನ *ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್ (Elements)* ಗ್ರಂಥದಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಸಮರ್ಥನೆಯನ್ನು ಪರೋಕ್ಷ ಪುರಾವೆ ಅಥವಾ ಅಸಂಬದ್ಧ ತೀರ್ಮಾನಗಳ ನಿರಾಕರಣೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ

ಶ್ರೇಢಿಗೆ ಅಂತ್ಯವಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅಂತಹ ಸರಣಿಯ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ N ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times \ldots \times N = N!$$

ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ,

$$N!+1$$

ಇದೊಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದ್ದರಿಂದ ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದಾದರೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಂಕಿ ಇರಲೇಬೇಕು. ಹಾಗಾದರೆ ಇದು ಒಂದಾದರೂ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಲೇ ಬೇಕು. ನಮ್ಮ ದತ್ತಾಂಶದಂತೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಯ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ N ಆಗಿದ್ದರೂ, N!+1 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡ N ಅಥವಾ N ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ; ಏಕೆಂದರೆ ಹಾಗೆ ಭಾಗಿಸಿದಾಗೆಲ್ಲ ಶೇಷವಾಗಿ 1 ಉಳಿದೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿಗೆ ಅಂತ್ಯವಿದೆ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ಕಲ್ಪನೆ ಒಂದು ಅಸಂಬದ್ಧತೆಗೆ ಕಾರಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮ ಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಶ್ರೇಢಿ ಎಷ್ಟು ದೀರ್ಘವಾಗಿದ್ದರೂ, ಈ ಶ್ರೇಢಿಯ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಅನಂತವಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುವುದು ಖಚಿತ.

ಅತಿದೊಡ್ಡ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ

ವಿಪರೀತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇವೆಯೆಂದು ನಂಬುವುದು ಒಂದು ವಿಷಯವಾದರೆ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯವೆಂದು ಗುರುತಿಸುವುದು ಬೇರೆಯೇ ವಿಷಯ.

ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದೊಡ್ಡದಾದಷ್ಟೂ ಅದು ಅವಿಭಾಜ್ಯವೇ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಮಾಡಬೇಕಾದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವೂ ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತದೆ. ಈವರೆಗೆ ಗುರುತಿಸಲಾಗಿರುವ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿದೊಡ್ಡದು ಇದು.

$$2^{2281}-1.$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು ಏಳುನೂರು ಅಂಕಿಗಳಿವೆ. ಇದರ ಬಗೆಗಿನ ಅವಶ್ಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಲು ಶಕ್ತಿಶಾಲಿಯಾದ ಆಧುನಿಕ ಗಣಕಯಂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಲಾಯಿತು. (ಅಧ್ಯಾಯ 1 ಮತ್ತು 2 ನೋಡಿ).

ಒಂದು ಹೊಣೆಗಾರಿಕೆಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ

ಕೆಲವು ಗಣಿತ ವಿಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತದ ಗಣನೆಗಳು ಬಹಳ ದೀರ್ಘವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆಗೆಲ್ಲಾ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನಗಳು ಮಾತ್ರ ನಮ್ಮ ನೆರವಿಗೆ ಬರಬಲ್ಲವು : ಈಗ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದಿರಲಿ :

$$\frac{2}{1+\dfrac{1}{90\ 000\ 000\ 000}}$$

ವಿದ್ಯುದಯಸ್ಕಾಂತೀಯ ಅಲೆಗಳ ವೇಗಕ್ಕಿಂತಲೂ ಬಹುಪಾಲು ಕಡಿಮೆ ವೇಗದ ಕಾಯಗಳ ಚಲನೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ಇಂಜಿನಿಯರುಗಳು, ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದವು ನೀಡುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುವ ವ್ಯತ್ಯಯಗಳನ್ನೂ ಪರಿಗಣನೆಗೆ ತಾರದೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು. v_1 ಮತ್ತು v_2 ವೇಗಗಳನ್ನು ಒಮ್ಮೆಗೇ ಹೊಂದಿ ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನೆಡೆಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಕಾಯದ ಒಟ್ಟು ವೇಗವನ್ನು (v_1+v_2) ಕಿ. ಮೀ./ ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದು ಚಲನವಿಜ್ಞಾನವು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದ ಅಳವಡಿಸಿದ ಚಲನವಿಜ್ಞಾನವು ಇದಕ್ಕೆ ನೀಡುವ ಸೂತ್ರ ಹೀಗಿದೆ :

$$\frac{v_1+v_2}{1+\dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$$ ಕಿ.ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡ್.

ಇಲ್ಲಿ 'c' ಎಂದರೆ ನಿರ್ವಾತದಲ್ಲಿ ಬೆಳಕಿನ ವೇಗ (ಸುಮಾರು 300,000 ಕಿ. ಮೀ. ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ). ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಒಂದು ಕಿಲೋ ಮೀಟರಿನ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನ ಕಡೆಗೆ ಒಮ್ಮೆಗೇ ಎರಡು ಬಗೆಯ ಚಲನೆಗಳಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿರುವ ಕಾಯದ ವೇಗವು ಚಲನ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಕಾರ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 2 ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ಗಳು ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ನೂತನ ಕಾಲದ ಚಲನ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಕಾರ ಈ ವೇಗ

$$\frac{2}{1+\dfrac{1}{90\ 000\ 000\ 000}}$$ ಕಿ. ಮೀ/ಸೆಕೆಂಡ್.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಷ್ಟು? ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ತೀವ್ರ ಸಂವೇದನಾಶೀಲ ಉಪಕರಣಗಳಿಂದ ಮಾತ್ರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ? ಇವನ್ನು ತಿಳಿಯಲಿಕ್ಕಾಗಿಯೇ ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು ಎರಡು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ : ಮೊದಲು ಮಾಮೂಲಿ ಅಂಕಗಣಿತದ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ, ಬಳಿಕ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತದ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದೀರ್ಘ ಸಾಲುಗಳತ್ತ, ಒಮ್ಮೆ ಕಣ್ಣು ಹಾಯಿಸಿದರೆ ಸಾಕು, ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನದ ಖಚಿತ ಅನುಕೂಲಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತವೆ.

ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಮಜಲುಗಳ ಈ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಯನ್ನು ಸರಳ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರೋಣ :

$$\frac{2}{1+\dfrac{1}{90\ 000\ 000\ 000}} = \frac{180\ 000\ 000\ 000}{90\ 000\ 000\ 001}.$$

ಈಗ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ :

```
                 1.999 999 999 977...
90 000 000 001)  180 000 000 000
                  90 000 000 001
                  899 999 999 990
                  810 000 000 009
                   899 999 999 810
                   810 000 000 009
                    899 999 998 010
                    810 000 000 009
                     899 999 980 010
                     810 000 000 009
                      899 999 800 010
                      810 000 000 009
                       899 998 000 010
                       810 000 000 009
                        899 980 000 010
                        810 000 000 009
                         899 800 000 010
                         810 000 000 009
                          898 000 000 010
                          810 000 000 009
                           880 000 000 010
                           810 000 000 009
                            700 000 000 010
                            630 000 000 007
                             70 000 000 003
```

ಈ ಭಾಗಾಕಾರ ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಏಕತಾನದ, ತಲೆತಿನ್ನುವ ಕೆಲಸ. ಇದರಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಹಂತದಲ್ಲಾದರೂ ತಪ್ಪುಗಳು ನುಸುಳಬಹುದು. ಅದೇನಿದ್ದರೂ, ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗ, 9ಗಳ ಸರಣಿ ಮುಗಿದು, ಬೇರೆ ಅಂಕೆಗಳ ಸರಣಿ ಆರಂಭವಾಗುವ ನಿಖರವಾದ ಹಂತವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಮುಖ್ಯ.

ಈಗ ಇದೇ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಎಷ್ಟು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪರಿಹರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆ ಸಮಾನವಾದ ಸನ್ನಿಹಿತ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತ ಬಳಸುತ್ತದೆ. a ಎಂಬುದು ಅತ್ಯಂತ ಪುಟ್ಟ ಭಾಗವಾದಾಗ,

$$\frac{1}{1+a} \approx 1-a$$

ಇಲ್ಲಿ ≈ ಎಂಬ ಸಂಕೇತ "ಸರಿ ಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮವಾದ" ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಸೂತ್ರ ನಿಜ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು: ಭಾಜ್ಯ 1ಕ್ಕೆ ಅದರ ಭಾಜಕ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ

$$1 = (1+a)(1-a)$$

ಅಥವಾ $$1 = 1 - a^2.$$

ಇದರಲ್ಲಿ, a ಅತ್ಯಂತ ಪುಟ್ಟ ಭಾಗ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 0.001)ವಾದ್ದರಿಂದ a^2 ಎಂಬುದು ಅದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಪುಟ್ಟದು (0.000001) ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸದಿದ್ದರೂ ತೊಂದರೆಯಿಲ್ಲ.

ಈಗ ಮೇಲಿನ ತರ್ಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.*

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90\ 000\ 000\ 000}} = \frac{2}{1+\frac{1}{9\times10^{10}}}$$

$$\approx 2(1-0.111\ldots \times 10^{-10}) = 2-0.0000000000222\ldots$$

$$= 1.9999999999777\ldots.$$

ಅಂಕಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಪಡೆದ ಉತ್ತರವೇ ದೊರಕಿದೆ; ಆದರೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಬಹಳ ಕಿರಿದಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷಿಪ್ರವಾಗಿ ಫಲ ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಈ ಮುನ್ನ ತಿಳಿಸಿದ ಚಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಫಲಿತಾಂಶದ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಏನು ? ಎಂದು ತಿಳಿಯುವ ಕುತೂಹಲ ಓದುಗರಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದು. ಬೆಳಕಿನ ವೇಗಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸಿದವು ಅಲ್ಪ ಪ್ರಮಾಣದ ವೇಗಗಳು. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ, ಹಳೆಯ ಪದ್ಧತಿಯ ಸೂತ್ರದಿಂದ ವೇಗಗಳ ಸಂಯೋಜನಾ ನಿಯಮದಿಂದಾಗುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವುದು ಕಷ್ಟಸಾಧ್ಯ. ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 1 ಕಿ.ಮೀ. ನಷ್ಟು ಅಧಿಕ ವೇಗಗಳಿದ್ದಾಗಲೂ, ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವ ಫಲಿತಾಂಶ. 11ನೆಯ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಷ್ಟೇ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. (ಸಾಮಾನ್ಯ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ 4ರಿಂದ 6 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಷ್ಟೇ ಸೀಮಿತಗೊಳಿಸುತ್ತಾರೆ). "ನಿಧಾನ" (ಬೆಳಕಿನ ವೇಗಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಸಿದ ಚಲನೆಯ ಕಾಯಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ನೂತನ ಐನ್‌ಸ್ಟೀನಿಯನ್ ಚಲನ ವಿಜ್ಞಾನದಿಂದಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳು ಉಂಟಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಅದೇನಿದ್ದರೂ, ಆಧುನಿಕ ಜೀವನದ ಒಂದು ಪುರೋಗಾಮಿ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಈ ತೀರ್ಮಾನದ ಬಗ್ಗೆ ಎಚ್ಚರ ವಹಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅದು ಬಾಹ್ಯಾಕಾಶ ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ. ಇಂದು ಕೃತಕ ಉಪಗ್ರಹಗಳು ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯಾಕಾಶ ವಾಹನಗಳ ವೇಗಗಳು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 10 ಕಿಲೋಮೀಟರುಗಳಿಗೆ ಏರಿವೆ. ಈ ವೇಗದಲ್ಲಿ, ಹಳೆಯ ಪದ್ಧತಿಯ ಹಾಗೂ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾದದ ಸೂತ್ರಗಳ ಮೌಲ್ಯಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 9ನೆಯ ದಶಕ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಇದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ವೇಗಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲಿರುವ ಕಾರಣ, ಈ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮುಖ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

* ಈಗ ಬಳಸುವ ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮವಾದ ಮೌಲ್ಯ

$$\frac{A}{1+a} \approx A(1-a).$$

ಬೀಜಗಣಿತ ಬಳಸದೆ ಗಣನೆ ಸುಲಭವೆನ್ನಿಸುವುದು ಯಾವಾಗ ?

ಬೀಜಗಣಿತವು ಅಂಕಗಣಿತಕ್ಕೆ ಬಹಳ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುವ ಪ್ರಕರಣಗಳು ಇರುವಂತೆಯೇ, ಬೀಜಗಣಿತವು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಗಡಾಯಿಸುವ ಪ್ರಕರಣಗಳೂ ಇವೆ. ಗಣಿತದ ಉತ್ತಮ ಜ್ಞಾನದಿಂದ, ಗಣಿತ ಸಾಧನಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವಾಗಲೂ ನೇರ ಹಾಗೂ ನಂಬಲರ್ಹ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಆ ವಿಧಾನವು ಯಾವ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ – ಅಂಕಗಣಿತ, ಬೀಜಗಣಿತ, ರೇಖಾಗಣಿತ ಅಥವಾ ಇನ್ನಾವುದೇ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ – ಸೇರಿದ್ದು ಎಂಬ ಅಂಶ ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸುವವನು ಬೀಜಗಣಿತ ಬಳಸಿದರೆ ಗೊಂದಲಕ್ಕೀಡಾಗುವ ಒಂದು ಪ್ರಕರಣ ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದು ಸೂಕ್ತ. ಅಂತಹ ಉಪಯುಕ್ತ ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದು ಮುಂದಿದೆ :

ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸೂಚಿತ ಶೇಷಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಕಿರಿದಾದುದು ಯಾವುದು ?

2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ	ಶೇಷ 1
3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ	ಶೇಷ 2
4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ	ಶೇಷ 3
5 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ	ಶೇಷ 4
6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ	ಶೇಷ 5
7 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ	ಶೇಷ 6
8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ	ಶೇಷ 7
9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ	ಶೇಷ 8

ಉತ್ತರ :

ನನ್ನ ಬಳಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ ಕೇಳಿದಾತ ಹೀಗೆಂದ: "ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸುತ್ತೀರಿ? ಇದರಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ. ಎಲ್ಲವೂ ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಕಲಸು ಮೇಲೋಗರವಾಗುತ್ತದೆ."

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬಲು ಸುಲಭ ಉಪಾಯ: ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೂ, ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನೂ ತೊರೆದು ಬಿಡುವುದು. ಅಂಕಗಣಿತದ ಸರಳ ತರ್ಕದಿಂದ ಇದನ್ನು ಬಹಳ ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ 1 ಕೂಡಿಸಿ. ಈಗ ಅದನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ ಎಷ್ಟು? ಶೇಷ 1 + 1 = 2; ಅಂದರೆ ಅದು 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದರ್ಥ.

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 3, 4, 5, 6, 7, 8 ಹಾಗೂ 9 ರಿಂದಲೂ ಅದು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಕಿರಿದು 9 x 8 x 7 x 5 = 2520. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಖ್ಯೆ 2519. ಈ ಉತ್ತರವನ್ನು ತಕ್ಷಣ ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

■

ಅಧ್ಯಾಯ – ನಾಲ್ಕು

ಡೈಯೊಫಾಂಟೈನ್ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಸ್ವೆಟರ್ ಕೊಳ್ಳುವುದು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಒಂದು ಸ್ವೆಟರ್ ಕೊಳ್ಳಲು ನೀವು 19 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ತೆರಬೇಕು. ನಿಮ್ಮ ಬಳಿ ಮೂರು-ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳು ಮಾತ್ರ ಇವೆ. ಅಂಗಡಿಯಲ್ಲಿ ಹಣ ಎಣಿಸುವಾತನ ಬಳಿ ಐದು-ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳು ಮಾತ್ರ ಇವೆ. ನೀವು ಸ್ವೆಟರ್‌ನ ಬೆಲೆ ಪಾವತಿ ಮಾಡುವುದು ಹೇಗೆ ? ಅಥವಾ ನಿಮಗೆ ಪಾವತಿ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೇ ?

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು : ಅಂಗಡಿಯವನಿಗೆ ಮೂರು-ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳಲ್ಲಿ 19 ರೂಪಾಯಿ ತೆತ್ತು ಬಾಕಿ ಚಿಲ್ಲರೆಯನ್ನು ಐದು-ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಲು ನೀವು ಅವನಿಗೆ ಮೂರು-ರೂಪಾಯಿನ ಎಷ್ಟು ನೋಟುಗಳನ್ನು ಕೊಡಬೇಕು ? ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಿವೆ : ನೀವು ಕೊಡುವ ಮೂರು-ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಮತ್ತು ನೀವು ಚಿಲ್ಲರೆಯಾಗಿ ಪಡೆಯುವ ಐದು-ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ y. ಆದರೆ ನೀವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣ ರೂಪಿಸಬಹುದು :

$$3x-5y=19.$$

ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಅಂಶಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉತ್ತರಗಳಿರಬಹುದು. ಆದರೆ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ್ದರಿಂದ ಉತ್ತರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು. (x ಮತ್ತು y ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಏಕೆಂದರೆ ಅವು ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು). ಈ ಆಧಾರದಿಂದ ಇಂತಹ ಅನಿರ್ಧರಣೀಯ (Indeterminate) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ರೂಪಿಸಿ ಬೀಜಗಣಿತಕ್ಕೆ ನೀಡಿದ ಕೀರ್ತಿ ಯುರೋಪಿನ ಪ್ರಥಮ ಬೀಜಗಣಿತಜ್ಞನೂ ಪ್ರಾಚೀನ ಕಾಲದ ಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞನೂ ಆದ ಡೈಯೊಫಾಂಟೈನ್‌ಗೆ ಸಲ್ಲುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಇದು, ಡೈಯೊಫಾಂಟೈನ್ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದೇ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉತ್ತರ :

ಇಂತಹ ಅನಿರ್ಧರಣೀಯ (Indeterminate) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ಮೇಲಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಳಸೋಣ :

$$3x-5y=19$$

x ಮತ್ತು y ಗಳು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೆಂಬ ಆಧಾರದಿಂದ, ನಾವೀಗ ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆ ಪತ್ತೆ ಮಾಡಬೇಕು.

ಮೊದಲು ಅತಿ ಕಿರಿಯ ಸಹಗುಣಕವುಳ್ಳ ಅವ್ಯಕ್ತಪದ ಅಂಕೆ $3x$ ಅನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕಿಸೋಣ. ಈಗ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$3x=19+5y$$

ಆದ್ದರಿಂದ

$$x=\frac{19+5y}{3}=6+y+\frac{1+2y}{3}.$$

ಇದರಲ್ಲಿ, x, 6 ಮತ್ತು y ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ್ದರಿಂದ, $\frac{1+2y}{3}$ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಈ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣ ನಿಜವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕ t ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ,

$$x=6+y+t$$

ಇಲ್ಲಿ, $t=\frac{1+2y}{3}$

ಹಾಗಾಗಿ,

$$3t=1+2y,\ 2y=3t-1.$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$y=\frac{3t-1}{2}=t+\frac{t-1}{2}.$$

ಇಲ್ಲಿ y ಮತ್ತು t ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{t-1}{2}$ ಕೂಡ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಇದು t_1 ಎಂದಿರಲಿ. ಇದರಿಂದಾಗಿ,

$$y=t+t_1$$

ಇಲ್ಲಿ $t_1=\frac{t-1}{2}$

ಅಂದರೆ,

$$2t_1=t-1 \text{ ಮತ್ತು } t=2t_1+1.$$

ಈಗ $t=2t_1+1$ ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಬಳಸೋಣ.

$$y=t+t_1=(2t_1+1)+t_1=3t_1+1,$$
$$x=6+y+t=6+(3t_1+1)+(2t_1+1)=8+5t_1.$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಸೂತ್ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದ್ದೇವೆ :*

* ನಿಖರವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ $3x-5y=19$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಉತ್ತರಗಳು $x=8+5t_1$ ಮತ್ತು $y=1+3t_1$ ಎಂಬ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿದ್ದು, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ t_1 ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂದಷ್ಟೇ ಸಾಬೀತು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ. ಇದರ ವಿಲೋಮವನ್ನು (t_1 ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು) ಸಾಧಿಸಿಲ್ಲ. ಅದೇನಿದ್ದರೂ, ಹಿಮ್ಮುಖವಾಗಿ ತರ್ಕಿಸಿದರೆ ಇದು ನಿಜವೆಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಅಥವಾ, ಈಗ ದೊರಕಿದ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$x=8+5t_1,$

$y=1+3t_1.$

ನಮಗೆ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮಾತ್ರವಲ್ಲ ಧನಾಂಕಗಳೂ ಆಗಿವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಬೆಲೆ 0 ಗಿಂತ ಅಧಿಕ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$8+5t_1>0,$

$1+3t_1>0.$

ಈ ಅಸಮ ಸಂಬಂಧಗಳಿಂದ ದೊರಕುವ ನಿರ್ಣಯ :

$5t_1>-8$ ಮತ್ತು $t_1>-\frac{8}{5},$

$3t_1>-1$ ಮತ್ತು $t_1>-\frac{1}{3}.$

ಇವು t_1 ನ ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ : ಅದು $-{}^1/_3$ ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು (ಅಂದ ಮೇಲೆ ಅದು $-{}^8/_5$ ಗಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರಬೇಕು). ಆದರೆ t_1 ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದ್ದರಿಂದ, ಅದು ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲೊಂದಾಗಿರಲೇ ಬೇಕು :

$t_1=0,1,2,3,4,...$

ಇದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆ :

$x=8+5t_1=8,13,18,23,...,$

$y=1+3t_1=1,4,7,10....$

ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಪಾವತಿ ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಒಂದು ವಿಧಾನ ಕಂಡುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ :

ನೀವು 8 ಮೂರು–ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು 1 ಐದು–ರೂಪಾಯಿ ನೋಟನ್ನು ಚಿಲ್ಲರೆಯಾಗಿ ವಾಪಾಸು ಪಡೆಯಿರಿ.

$8\times3-5=19,$

ಅಥವಾ, 13 ಮೂರು–ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು 4 ಐದು–ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳನ್ನು ಚಿಲ್ಲರೆಯಾಗಿ ವಾಪಾಸು ಪಡೆಯಿರಿ.

$13\times3-4\times5=19,$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮುಂದುವರೆಸಬಹುದು.

ತಾತ್ವಿಕವಾಗಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉತ್ತರಗಳು ಇವೆಯಾದರೂ, ವಾಸ್ತವ ಬಳಕೆಯ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಇದರ ಉತ್ತರಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಮಿತಿ ಇದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಕೊಳ್ಳುವವನಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಅಂಗಡಿಯವನಾಗಲಿ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನೋಟುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಬಳಿಯೂ 10 ನೋಟುಗಳಿವೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಪಾವತಿ ಮಾಡಲು ಇರುವ ಏಕೈಕ ವಿಧಾನ: ಕೊಳ್ಳುವವನು ಮೂರು–ರೂಪಾಯಿಗಳ 8 ನೋಟುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಐದು–ರೂಪಾಯಿನ 1 ನೋಟನ್ನು ವಾಪಾಸು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಅನಿರ್ಧರಣೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಖಚಿತವಾದ ಜೋಡಿ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಲ್ಲವೆಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಈಗ ಮತ್ತೆ ನಮ್ಮ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಓದುಗರಿಗೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕಾಗಿ ಒಂದು ಸೂಚನೆ: ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ ಕೊಳ್ಳುವವನಲ್ಲಿ ಐದು–ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳೂ, ಅಂಗಡಿಯವನಲ್ಲಿ ಮೂರು–ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳೂ ಮಾತ್ರ ಇದ್ದರೆ ಏನಾಗುವುದೆಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ. ಆಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ತರಗಳ ಸರಣಿ ದೊರಕುವುದು:

$x=5,8,11,...$

$y=2,7,12,...$

ಅಂದರೆ,

$5\times5-2\times3=19,$

$8\times5-7\times3=19,$

$11\times5-12\times3=19.$

ಬೀಜ ಗಣಿತದ ಸರಳ ತಂತ್ರವೊಂದನ್ನು ಬಳಸಿ, ಮೊದಲ ಸಮಸ್ಯೆ ಉತ್ತರಗಳ ಮೂಲಕವೇ ಎರಡನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರಗಳನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ, ಐದು–ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಹಾಗೂ ಮೂರು–ರೂಪಾಯಿ ನೋಟುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಎಂದರೆ ಋಣ ಬೆಲೆಯ ಐದು–ರೂಪಾಯಿ (–5) ನೋಟುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಹಾಗು ಋಣ ಬೆಲೆಯ ಮೂರು–ರೂಪಾಯಿ (–3) ನೋಟುಗಳನ್ನು ಕೊಡುವುದು ಎಂದೂ ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ, ಸಮಸ್ಯೆಯ ಈ ಹೊಸರೂಪವನ್ನು ಮೂಲ ಸಮಸ್ಯೆಗಾಗಿ ರೂಪಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣದ ನೆರವಿನಿಂದಲೇ ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ :

$3x-5y=19,$

ಆದರೆ, ಹೀಗಾಗಲು x ಮತ್ತು y ಗಳು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ದೊರಕುವ ನಿರ್ಣಯ ಹೀಗಿದೆ :

$x=8+5t_1, y=1+3t_1$

ಈಗ, ($x<0$ ಮತ್ತು $y<0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ),

$8+5t_1<0,\quad 1+3t_1<0$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$t_1<-\frac{8}{5}.$

ಈಗ, $t_1=-2,-3,-4$ ... ಇತ್ಯಾದಿ. ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದರೆ, ಈ ಮೊದಲು ಪಡೆದ ಸೂತ್ರಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ x ಮತ್ತು y ಗಳಿಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ :

$t_1=-2,-3,-4,$

$x=-2,-7,-12,$

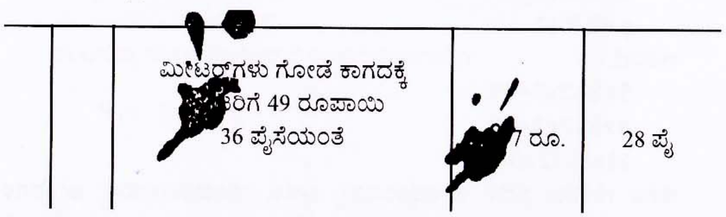
$y=-5,-8,-11.$

ಮೊದಲ ಜೋಡಿ ಉತ್ತರಗಳು, $x=-2, y=-5$. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಕೊಳ್ಳುವವನು ಮೂರು – ರೂಪಾಯಿಗಳ –2 ನೋಟುಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಾನೆ ಹಾಗೂ ಐದು – ರೂಪಾಯಿಗಳ – 5 ನೋಟುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಅಥವಾ, ಇದನ್ನೇ ನಮ್ಮ ಆಡು ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಆತ ಐದು–ರೂಪಾಯಿಗಳ 5 ನೋಟುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಮೂರು – ರೂಪಾಯಿಗಳ 2 ನೋಟುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತಾನೆ. ಇಂತಹದೇ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಇತರ ಉತ್ತರಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು.

ಲೆಕ್ಕಪತ್ರಗಳ ತಪಾಸಣೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಒಂದು ಅಂಗಡಿಯ ಲೆಕ್ಕ ಪತ್ರಗಳನ್ನು ತಪಾಸಣೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದ ತಪಾಸಣೆಗಾರನಿಗೆ, ಇಂಕ್ ಚೆಲ್ಲಿ ಚಿತ್ತು ಉಂಟಾದ ನಮೂದೊಂದು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಾಣಿಸಿತು :



ಎಷ್ಟು ಮೀಟರ್ ಮಾರಾಟವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಚಿತ್ತಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲ. ಮಾರಾಟದಿಂದ ಪಡೆಯಲಾದ ಹಣದ ಬರಹವೂ ಚಿತ್ತಾಗಿದ್ದು, ಅದರಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಕಾಣುತ್ತಿವೆ. ಈ ಅಂಕೆಗಳ ಹಿಂದೆ ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳಿವೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಈಗ ನಮೂದಿನಲ್ಲಿ ಕಾಣುತ್ತಿರುವಷ್ಟರಿಂದಲೇ ಮೂಲದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ತಪಾಸಣೆಗಾರರಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವೇ ?

ಉತ್ತರ :

ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದಿರಲಿ. ಹಾಗಾಗಿ ಮಾರಾಟದಿಂದ ದೊರಕಬೇಕಾದ ಹಣದ ಮೊತ್ತ ಪೈಸೆಗಳಲ್ಲಿ :

$$4936x.$$

ಹಣದ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಚಿತ್ತಾಗಿರುವ ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳು y ಎಂದಿರಲಿ. ಇದು ಎಷ್ಟು ಸಾವಿರ ಪೈಸೆಗಳು ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದು ಖಚಿತ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮಾರಾಟದಿಂದ ದೊರಕಿದ ಹಣ (ಪೈಸೆಗಳಲ್ಲಿ) :

$$1000y + 728.$$

ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$4936x = 1000y + 728$$

ಅಥವಾ ಇದನ್ನು 8 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ,

$$617x - 125y = 91.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಹಾಗೂ y ನ ಬೆಲೆ 999 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಲಾರದು. ಏಕೆಂದರೆ, y ಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳು ಮಾತ್ರ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈ ಮುನ್ನ ವಿವರಿಸಿದಂತೆ ಬಿಡಿಸೋಣ :

$$125y = 617x - 91,$$

$$y = 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = 5x - 1 + \frac{2(17 - 4x)}{125} = 5x - 1 + 2t.$$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{617}{125} = 5 - \frac{8}{125}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಶೇಷವು ಕಿರಿದಾದಷ್ಟು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸುಲಭ.

$$\frac{2(17 - 4x)}{125}$$

ಈ ಮೇಲಿನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ. ಇದರಲ್ಲಿ 2ಅನ್ನು 125ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, $\frac{17-4x}{125}$ ಎಂಬುದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು. ಇದು t ಎಂದಿರಲಿ.

ಈ ಪ್ರಕಾರ,

$$\frac{17 - 4x}{125} = t$$

ಇದರಿಂದ

$$17 - 4x = 125t,$$

$$x = 4 - 31t + \frac{1 - t}{4} = 4 - 31t + t_1$$

ಇಲ್ಲಿ

$$t_1 = \frac{1 - t}{4}$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$4t_1 = 1 - t,$$
$$t = 1 - 4t_1,$$
$$x = 125t_1 - 27,$$
$$y = 617t_1 - 134^*.$$

ಈಗ ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವ ವಿಷಯ :

$$100 \le y < 1000.$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$100 \le 617t_1 - 134 < 1000$$

ಇದರಿಂದ ದೊರಕುವ ಬೆಲೆಗಳು :

$$t_1 \ge \frac{234}{617} \text{ ಮತ್ತು } t_1 < \frac{1134}{617}.$$

ಈಗ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದಂತೆ, t_1ಗೆ ಇರಬಹುದಾದ ಏಕೈಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆ.

$$t_1 = 1.$$

* **ಗಮನಿಸಿ :** ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $617x - 125y = 91$, x ಮತ್ತು y ಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳೇ t_1ನ ಸಹಗುಣಕಗಳೂ ಆಗಿವೆ. ಆದರೆ t_1ನ ಒಂದು ಸಹಗುಣಕದ ಚಿಹ್ನೆ ಋಣದ ಬದಲಾಗಿ ಧನವಾಗಿದೆ. ಇದು ಆಕಸ್ಮಿಕವಲ್ಲ; x ಮತ್ತು y ಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಪ್ರತೀ ಬಾರಿ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಗಲೇಬೇಕೆಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ

$$x=98,\ y=483,$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, 98 ಮೀಟರುಗಳು ಮಾರಾಟವಾಗಿವೆ ಹಾಗೂ ಮಾರಾಟದಿಂದ 4837 ರೂಪಾಯಿಗಳು ಮತ್ತು 28 ಪೈಸೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಚಿತ್ತಾಗಿದ್ದ ನಮೂದನ್ನು ಪುನಃ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಯಿತು.

ಅಂಚೆಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವುದು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಒಂದು ರೂಪಾಯಿನಿಂದ, 1-ಪೈಸೆ, 4-ಪೈಸೆ ಹಾಗೂ 12-ಪೈಸೆ ಬೆಲೆಯ ಒಟ್ಟು 40 ಅಂಚೆ ಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ಬೆಲೆಗಳ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಅಂಚೆಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯ?

ಉತ್ತರ :

ಇಲ್ಲಿ ತಲಾ ಮೂರು ಅವ್ಯಕ್ತಾಂಶಗಳಿರುವ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿವೆ :

$$x+4y+12z=100,$$
$$x+y+z=40,$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು 1– ಪೈಸೆ ಅಂಚೆಚೀಟಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, y ಎಂಬುದು 4 – ಪೈಸೆ ಅಂಚೆಚೀಟಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ z ಎಂಬುದು 12 – ಪೈಸೆ ಅಂಚೆಚೀಟಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣವೊಂದು ಸಿಗುತ್ತದೆ:

$$3y+11z=60.$$

ಈಗ y ಯ ಬೆಲೆ

$$y=20-11\times\frac{z}{3}.$$

ಇಲ್ಲಿ $^{z}/_{3}$ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಇದು t ಎಂದಿರಲಿ

ಈಗ

$$y=20-11t,$$
$$z=3t.$$

ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದಕ್ಕೆ y ಮತ್ತು z ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$x+20-11t+3t=40$$

ಇದರಿಂದ

$$x=20+8t.$$

ಆದರೆ $x\geq 0, y\geq 0$ ಹಾಗೂ $z\geq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ t ಯ ಬೆಲೆಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮಿತಿಗಳಿರುತ್ತವೆ :

$$0\leq t\leq 1\frac{9}{11},$$

ಇದರಿಂದಾಗಿ t ಗೆ ಕೇವಲ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿರಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು; ಅವು,

$t=0$ ಮತ್ತು $t=1$.

ಆಗ x, y ಮತ್ತು z ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತವೆ :

t =	0	1
x =	20	28
y =	20	9
z =	0	3

$$20\times1+20\times4+0\times12=100,$$
$$28\times1+9\times4+3\times12=100.$$

ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಕೇವಲ 2 ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಅಂಚೆಚೀಟಿಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯ (ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಯ ಒಂದಾದರೂ ಅಂಚೆಚೀಟಿ ಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂಬ ಷರತ್ತಿದ್ದರೆ, ಆ ಪ್ರಕಾರ ಕೊಳ್ಳಲು ಏಕೈಕ ವಿಧಾನವಿದೆ).

ಇಂಥದೇ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆ ಮುಂದಿದೆ.

ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳುವುದು

ಸಮಸ್ಯೆ :

5 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಗೆಯ 100 ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ಹಣ್ಣುಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಹೀಗಿವೆ :

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕಲ್ಲಂಗಡಿ...... 50 ಪೈಸೆಗಳು,
ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸೇಬು.......... 10 ಪೈಸೆಗಳು,
ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ಲಮ್.......... 1 ಪೈಸೆ.

ಈ ಮೂರು ಬಗೆಯ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು ?

ಉತ್ತರ :

ಕಲ್ಲಂಗಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x, ಸೇಬುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ y ಹಾಗೂ ಪ್ಲಮ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ z ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು.

$$\left\{\begin{aligned}50x+10y+1z&=500,\\ x+y+z&=100.\end{aligned}\right.$$

ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಎರಡು ಅವ್ಯಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣವೊಂದು ಸಿಗುತ್ತದೆ.

$$49x+9y=400.$$

ಈಗ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುತ್ತಾ ಮುಂದುವರಿಯೋಣ :

$$y = \frac{400-49x}{9} = 44 - 5x + \frac{4(1-x)}{9} = 44-5x+4t$$

$$t = \frac{1-x}{9}, \quad x = 1-9t,$$

$$y = 44-5(1-9t)+4t = 39+49t.$$

ಈಗ ಸಿಗುವ ಅಸಮ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹೀಗಿವೆ :

$1-9t \geq 0$ ಮತ್ತು $39 + 49t \geq 0$

ಇವುಗಳಿಂದ

$$\frac{1}{9} \geq t \geq -\frac{39}{49}$$

ಹಾಗಾಗಿ, $t=0$, ಆದ್ದರಿಂದ,

$$x=1, y=39.$$

x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ $z = 60$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಒಂದು ಕಲ್ಲಂಗಡಿ, 39 ಸೇಬು ಹಾಗೂ 60 ಪ್ಲಮ್‌ಗಳನ್ನು ಕೊಳ್ಳಲಾಯಿತು. ಬೇರಾವುದೇ ಸಂಯೋಜನೆಗಳು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಜನ್ಮದಿನವನ್ನು ಊಹಿಸುವುದು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಅನಿಶ್ಚಿತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಪರಿಣತಿಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗಣಿತ ಚಮತ್ಕಾರವನ್ನು ಮಾಡಿ ತೋರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ.

ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯನ ಬಳಿ, ಅವನ ಜನ್ಮ ದಿನಾಂಕವನ್ನು 12ರಿಂದ ಹಾಗೂ ಜನ್ಮ ದಿನಾಂಕದ ತಿಂಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 31ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲು ಹೇಳಿ. ಆತನಿಂದ ಈ ಎರಡು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕೇಳಿ ತಿಳಿದು, ನೀವು ಅವನ ಜನ್ಮದಿನವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ಹೇಳಬಹುದು.

ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯ ಫೆಬ್ರವರಿ 9ರಂದು ಹುಟ್ಟಿದವನೆಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಆಗ ಆತ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಮಾಡುತ್ತಾನೆ :

$9 \times 12 = 108, \; 2 \times 31 = 62,$

$108 + 62 = 170.$

ಈ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ 170ನ್ನೂ ಆತ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿಸುತ್ತಾನೆ. ಇದರಿಂದ ನೀವು ಜನ್ಮ ದಿನಾಂಕವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವಿರಿ. ಹೇಗೆ ?

ಉತ್ತರ :

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಕೆಳಗಿನ ಅನಿರ್ಧರಣೀಯ (Indeterminate) ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪ ತಾಳುತ್ತದೆ :

$$12x+31y=170$$

ಇದರಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ತಿಂಗಳ ದಿನವೊಂದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ

x ನ ಬೆಲೆ 31ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಲ್ಲ ಮತ್ತು ತಿಂಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ y ನ ಬೆಲೆ 12ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಲ್ಲ.

$$x = \frac{170-31y}{12} = 14-3y + \frac{2+5y}{12} = 14-3y+t, \; 2+5y=12t,$$

$$y = \frac{-2+12t}{5} = 2t-2 \times \frac{1-t}{5} = 2t-2t_1,$$

$$1-t=5t_1 \qquad t=1-5t_1,$$

$$y=2(1-5t_1)-2t_1=2-12t_1,$$

$$x=14-3(2-12t_1)+1-5t_1=9+31t_1.$$

ನಮಗೆ $31 \geq x > 0$ ಮತ್ತು $12 \geq y > 0$, ಎಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ t_1 ನ ಮಿತಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಗುರುತಿಸಬಹುದು :

$$-\frac{9}{31} < t_1 < \frac{1}{9}$$

ಹಾಗಾಗಿ,

$$t_1=0, x=9, y=2.$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ ಜನ್ಮದಿನವು ಎರಡನೆಯ ತಿಂಗಳ 9ನೆಯ ದಿನ ಅರ್ಥಾತ್ ಫೆಬ್ರವರಿ 9.

ಸಮೀಕರಣಗಳ ಆಧಾರವಿಲ್ಲದೆ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವೊಂದಿದ್ದು, ಅದನ್ನೂ ಬಳಸಬಹುದು. ನಮಗೆ ತಿಳಿಸಲಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 'a' ಎಂದಾದರೆ, $a = 12x + 31y$. ಇದರಲ್ಲಿ $12x + 24y$ ಅನ್ನು 12ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ, 'a' ಮತ್ತು '7y' ಗಳನ್ನು 12ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ ಸಮಾನ ಆಗಿರಬೇಕು. ಇವನ್ನು 7ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ 7a ಮತ್ತು 49y ಗಳನ್ನು 12ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗಲೂ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ ಸಮಾನ ಆಗಿರಬೇಕು. ಆದರೆ $49y=48y+y$. ಈ 48y ಅನ್ನು 12ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, y ಮತ್ತು 7a ಗಳನ್ನು 12ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ ಸಮಾನ ಆಗಿರಬೇಕು ಎಂದಾಯ್ತು. ಇದರಿಂದಾಗಿ, 'a' ಎಂಬುದು 12ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗದಿದ್ದರೆ, 7a ಯನ್ನು 12ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷಕ್ಕೆ y ಸಮ, ಆದರೆ, 'a' ಯು 12ರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ, $y=12$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನ ತಿಂಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ y ಯನ್ನು ಖಚಿತವಾಗಿ ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತದೆ. ಜೊತೆಗೆ, y ಯ ಬೆಲೆ ತಿಳಿದರೆ x ನ ಬೆಲೆ ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚುವುದು ಸುಲಭ.

ಒಂದು ಪುಟ್ಟ ಸಲಹೆ : 7a ಯನ್ನು 12ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮುನ್ನ, 'a' ಯನ್ನು 12ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷವನ್ನು 'a' ಯ ಬದಲು ಅಳವಡಿಸಿ, ಆಗ ಸಮಸ್ಯೆ ಸರಳವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $a=170$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಮಾಡಿ :

$170=12 \times 14+2$ (ಈ ಪ್ರಕಾರ ಶೇಷ 2),

$2 \times 7=14; \; 14=12 \times 1+2$ (ಆದ್ದರಿಂದ $y=2$),

$$x = \frac{170-31y}{12} = \frac{170-31 \times 2}{12} = \frac{108}{12} = 9 \text{ (ಈ ಪ್ರಕಾರ } x=9).$$

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯನ ಜನ್ಮದಿನ ಫೆಬ್ರವರಿ 9 ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಈ ಚಮತ್ಕಾರದಲ್ಲಿ ಯಾವತ್ತೂ ತಪ್ಪಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಈಗ ಸಾಧಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಏಕೈಕ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಉತ್ತರವಿರುತ್ತದೆ – ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಬೇಕು. ನಿಮ್ಮ ಗೆಳೆಯ ನಿಮಗೆ ಹೇಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆ 'a' ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ, ಅವನ ಜನ್ಮದಿನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರಾಯಿತು :

$$12x+31y=a.$$

ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಇದರ ವಿರುದ್ಧ ಹೇಳಿಕೆ ನಿಜವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅದೆಂದರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಉತ್ತರಗಳಿವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅವು x_1, y_1,ಹಾಗೂ x_2, y_2 ಎಂದಿರಲಿ. (x_1 ಮತ್ತು x_2 31ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಲ್ಲ. ಹಾಗೂ y_1 ಮತ್ತು y_2 12ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಲ್ಲ). ಈಗ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು :

$$12x_1+31y_1=a,$$
$$12x_2+31y_2=a.$$

ಮೊದಲಿನದರಿಂದ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$12(x_1-x_2)+31(y_1-y_2)=0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ $12(x_1-x_2)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ 31ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. x_1 ಮತ್ತು x_2 ಗಳ ಬೆಲೆ 31ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ, $x_1 - x_2$ ಎಂಬ ಅವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 31ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, $x_1=x_2$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ, ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೆಯ ಉತ್ತರ ಎರಡನೆಯ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ, $12(x_1-x_2)$ ಸಂಖ್ಯೆಯು 31ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಎರಡು ಭಿನ್ನವಾದ ಉತ್ತರಗಳಿವೆ ಎಂಬ ಕಲ್ಪನೆಯೇ ವಿರೋಧೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಕೋಳಿಮರಿಗಳ ಮಾರಾಟ



ಚಿತ್ರ 21

ಒಂದು ಹಳೆಯ ಸಮಸ್ಯೆ :

ಮೂವರು ಸೋದರಿಯರು ಕೋಳಿಮರಿಗಳನ್ನು ಮಾರಲೆಂದು ಮಾರುಕಟ್ಟೆಗೆ ಬಂದರು. ಒಬ್ಬಳು 10, ಇನ್ನೊಬ್ಬಳು 16, ಮತ್ತೊಬ್ಬಳು 26 ಮರಿಗಳನ್ನು ಮಾರಲು ತಂದಿದ್ದರು. ಮೂವರೂ ಕೋಳಿಮರಿಗಳನ್ನು ಸಮಾನ ಬೆಲೆಗೆ ಮಾರಿದರು. ಮಧ್ಯಾಹ್ನದ ವೇಳೆಗೆ ಮೂವರೂ ಕೆಲವು ಮರಿಗಳನ್ನು ಮಾರಿದ್ದರು. ಬಾಕಿ ಮರಿಗಳು ಮಾರಾಟವಾಗದೆ ಉಳಿದಾವೆಂಬ ಭಯದಿಂದ ಅಪರಾಹ್ನ ಮೂವರೂ ಬೆಲೆ ಇಳಿಸಿ, ಸಮಾನ ಬೆಲೆಗೆ ಉಳಿದ ಮರಿಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಮಾರಿದರು. ಸಂಜೆಯ ಹೊತ್ತಿಗೆ, ಪ್ರತಿಯೊರ್ವ ಸೋದರಿಯೂ ಮಾರಾಟದಿಂದ ಸಮಾನ ಹಣವನ್ನು, 35 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಳು.

ಪೂರ್ವಾಹ್ನ ಮತ್ತು ಅಪರಾಹ್ನ ಕೋಳಿ ಮರಿಗಳನ್ನು ಯಾವ್ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಮಾರಲಾಯಿತು ?

ಉತ್ತರ :

ಪೂರ್ವಾಹ್ನ ಮೂವರು ಮಾರಿದ ಕೋಳಿಮರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ x, y, z ಎಂದಿರಲಿ. ಹಾಗಾದರೆ ಅಪರಾಹ್ನ ಅವರು ಕ್ರಮವಾಗಿ $10-x, 16-y, 26-z$ ಮರಿಗಳನ್ನು ಮಾರಿದರು. ಪೂರ್ವಾಹ್ನದ ಮಾರಾಟ ಬೆಲೆ m ಹಾಗೂ ಅಪರಾಹ್ನದ ಬೆಲೆ n ಎಂದಿರಲಿ. ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲು ಈ ಕೋಷ್ಟಕ ಬರೆಯೋಣ :

	ಮಾರಾಟವಾದ ಕೋಳಿ ಮರಿಗಳು			**ಬೆಲೆ**
ಪೂರ್ವಾಹ್ನ	x	y	z	m
ಅಪರಾಹ್ನ	$10-x$	16–y	26–z	n

ಮೊದಲಿನವಳು ಗಳಿಸಿದ ಹಣ :

$$mx+n(10-x);\text{ಹಾಗಾಗಿ, } mx+n(10-x)=35.$$

ಎರಡನೆಯವಳು ಗಳಿಸಿದ ಹಣ:

$$my+n(16-y);\text{ಹಾಗಾಗಿ, } my+n(16-y)=35.$$

ಮೂರನೆಯವಳು ಗಳಿಸಿದ ಹಣ:

$$mz+n(26-z);\text{ಹಾಗಾಗಿ, } mz+n(26-z)=35.$$

ಇವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು :

$$\left\{\begin{array}{l}(m-n)x+10n=35,\\(m-n)y+16n=35,\\(m-n)z+26n=35.\end{array}\right.$$

ಮೊದಲ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮೂರನೆಯದರಿಂದ, ಬಳಿಕ ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಮೂರನೆಯದರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣಗಳು :

$$\left\{\begin{array}{l}(m-n)(z-x)+16n=0,\\(m-n)(z-y)+10n=0,\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(m-n)(x-z)=16n,\\(m-n)(y-z)=10n.\end{array}\right.$$

ಈಗ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡನೆಯದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ. ಆಗ,

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{8}{5} \text{ ಅಥವಾ } \frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5}.$$

ಇಲ್ಲಿ x, y, z ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ್ದರಿಂದ, $x-z$ ಮತ್ತು $y-z$ ಗಳೂ ಕೂಡ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $x-z$ ಎಂಬುದು 8 ರಿಂದ ಹಾಗೂ $y-z$ ಎಂಬುದು 5 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಮಾತ್ರ, ಈ ಸಮೀಕರಣ ರೂಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

$$\frac{x-z}{8} = \frac{y-z}{5}$$

ಇದರಿಂದಾಗಿ,

$$\frac{x-z}{8} = t = \frac{y-z}{5}$$

ಇದರಲ್ಲಿ,

$x = z + 8t,$

$y = z + 5t.$

ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಷಯ t ಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಹಾಗೂ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದು. ಇದರ ಕಾರಣ $x > z$ (ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಮೊದಲಿನವಳಿಗೆ ಮೂರನೆಯವಳಷ್ಟೇ ಹಣ ಗಳಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರಲಿಲ್ಲ).

ಆದರೆ $x < 10$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$z + 8t < 10.$

ಈಗ z ಮತ್ತು t ಗಳು, ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ್ದರಿಂದ ಈ ಮೇಲಿನ ಅಸಮ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಬಲ್ಲ ಉತ್ತರಗಳು ಇವು ಮಾತ್ರ: $z = 1$ ಮತ್ತು $t = 1$. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸೋಣ :

$x = z + 8t$ ಮತ್ತು $y = z + 5t$,

ಇದರಿಂದ,

$x = 9$ ಮತ್ತು $y = 6$.

ಈಗ ಆರಂಭದ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪುನಃ ಗಮನಿಸೋಣ :

$mx + n(10 - x) = 35,$

$my + n(16 - y) = 35,$

$mz + n(26 - z) = 35.$

ಇವುಗಳಿಗೆ x, y ಮತ್ತು z ಗಳ ಬೆಲೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ, ಕೋಳಿಮರಿಗಳನ್ನು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದ ಬೆಲೆಗಳು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತವೆ. ಅವು,

$m = 3\frac{3}{4}$ ರೂಪಾಯಿಗಳು, $n = 1\frac{1}{4}$ ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಪೂರ್ವಾಹ್ನ ಕೋಳಿಮರಿಗಳನ್ನು ತಲಾ 3 ರೂಪಾಯಿ 75 ಪೈಸೆಗಳಿಗೆ, ಅಪರಾಹ್ನ ತಲಾ 1 ರೂಪಾಯಿ 25 ಪೈಸೆಗಳಿಗೆ ಮಾರಲಾಯಿತು.

ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹಾಗೂ ನಾಲ್ಕು ಪರಿಕರ್ಮಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಈ ಮುಂಚಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಐದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದಗಳಿದ್ದ ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳಿದ್ದವು. ಅವನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ನಾವು ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಳಸದೆ, ಮುಕ್ತ ಗಣಿತ ತರ್ಕವನ್ನು ಬಳಸಿದೆವು. ದ್ವಿಘಾತವುಳ್ಳ ಅನಿರ್ಧರಣೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಾಗಲೂ ಇದೇ ವಿಧಾನ ಅನುಸರಿಸೋಣ.

ಮೊದಲನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆ :

ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಾಲ್ಕು ಪರಿಕರ್ಮಗಳನ್ನು ಜರುಗಿಸಲಾಯಿತು :

1. ಅವುಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಲಾಯಿತು.
2. ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಕಳೆಯಲಾಯಿತು.
3. ಅವೆರಡನ್ನೂ ಗುಣಿಸಲಾಯಿತು.
4. ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಚಿಕ್ಕದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲಾಯಿತು.

ಈ ನಾಲ್ಕು ಕ್ರಿಯೆಗಳ ಫಲಿತಾಂಶವಾಗಿ ದೊರಕಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 243. ಹಾಗಾದರೆ, ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು ?

ಉತ್ತರ :

ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ x ಹಾಗೂ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ y ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ,

$$(x+y) + (x-y) + xy + \frac{x}{y} = 243.$$

ಇದನ್ನು yಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಆವರಣಗಳನ್ನು ತೆರೆದು, ಸಮರೂಪದ ಪದಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟು ಗೂಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣ :

$x(2y + y^2 + 1) = 243y.$

ಇದರಲ್ಲಿ $2y + y^2 + 1 = (y+1)^2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$x = \frac{243y}{(y+1)^2}.$$

x: ಎಂಬುದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ $(y+1)^2$ ಎಂಬ ಛೇದವು 243ರ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರಬೇಕು. (ಏಕೆಂದರೆ y ಸಂಖ್ಯೆಯು $y + 1$ ನ ಅಪವರ್ತನವನ್ನೇ ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ). $243 = 3^5$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಾದ 1, 3^2 ಮತ್ತು 9^2 ಗಳಿಂದ ಮಾತ್ರ 243ನ್ನು ಭಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ, $(y + 1)^2$ ಎಂಬುದು 1, 3^2 ಅಥವಾ 9^2ಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿರಲೇಬೇಕು. y ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲೇ ಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಂಡರೆ, y ಯ ಬೆಲೆ 8 ಅಥವಾ 2 ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

ಆಗ,

$$x = \frac{243 \times 8}{81} \text{ ಅಥವಾ } x = \frac{243 \times 2}{9}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 24 ಮತ್ತು 8 ಅಥವಾ 54 ಮತ್ತು 2.

ಯಾವ ಬಗೆಯ ಆಯತಾಕೃತಿ ?

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ (ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ) ಪಾರ್ಶ್ವಗಳ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ :

ಆಯತಾಕೃತಿಯ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳು 'x' ಮತ್ತು 'y' ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$2x+2y=xy$$

ಹೀಗಿದ್ದಾಗ, $x=\frac{2y}{y-2}$.

x ಮತ್ತು y ಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ್ದರಿಂದ y – 2 ಕೂಡ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು ಅಥವಾ y ಎಂಬುದು 2ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು.

ಈ ಪ್ರಕಾರ,

$$x=\frac{2y}{y-2}=\frac{2(y-2)+4}{y-2}=2+\frac{4}{y-2}.$$

ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದ್ದರಿಂದ $\frac{4}{y-2}$ ಕೂಡ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಬೇಕು. ಈ ತರ್ಕದಂತೆ $y>2$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, y ಎಂಬುದು 3, 4 ಅಥವಾ 6 ಮಾತ್ರ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಆಗ x ನ ಬೆಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 6, 4 ಅಥವಾ 3 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚಬೇಕಾದ ಆಕೃತಿಯು 3 ಮತ್ತು 6 ಮಾನ ಉದ್ದ–ಅಗಲಗಳ ಆಯತ ಅಥವಾ 4 ಮಾನದ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳ ಚೌಕ.

ಎರಡಂಕಿಗಳ ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಎರಡಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 46 ಮತ್ತು 96 ವಿಲಕ್ಷಣವಾಗಿವೆ. ಅವುಗಳ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದರೂ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಬದಲಾಗದು. ಇಲ್ಲಿ ನೋಡಿ :

46 x 96 = 4416 = 64 x 69.

ಇದೇ ಗುಣ ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡಂಕೆಗಳ ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಬೇರೆ ಇದೆಯೇ ? ಅವನ್ನೆಲ್ಲ ಪತ್ತೆ ಮಾಡಲು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವಿಧಾನವಿದೆಯೇ ?

ಉತ್ತರ :

ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕೆಗಳು x ಮತ್ತು y ಹಾಗು z ಮತ್ತು t ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣ ರಚಿಸಬಹುದು.

$$(10x+y)(10z\ \ +t)=(10y+x)(10t+z).$$

ಇದರ ಆವರಣಗಳನ್ನು ತೆರೆದು ಸರಳಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸೂತ್ರ :

$$x\quad =yt,$$

ಇಲ್ಲಿ x, y, z, t ಗಳು 10ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಇದರ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, 9 ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ, ಸಮಾನ ಗುಣಲಬ್ಧ ಹೊಂದಿರುವ ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡೋಣ :

1 x 4 = 2 x 2	2 x 8 = 4 x 4
1 x 6 = 2 x 3	2 x 9 = 3 x 6
1 x 8 = 2 x 4	3 x 8 = 4 x 6
1 x 9 = 3 x 3	4 x 9 = 6 x 6
2 x 6 = 3 x 4	

ಇಲ್ಲಿ ಒಂಬತ್ತು ಸಮ ಸಂಬಂಧಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರಿಂದಲೂ, ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಗುಣ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಅಥವಾ ಎರಡು ಜೋಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1 x 4 = 2 x 2 ಎಂಬ ಸಮ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬಳಸಿ ಒಂದು ಉತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು :

12 x 42 = 21 x 24.

ಇದರಂತೆ 1 x 6 = 2 x 3 ಎಂಬುದನ್ನು ಬಳಸಿ ಎರಡು ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು :

12 x 63 = 21 x 36,

13 x 62 = 31 x 26.

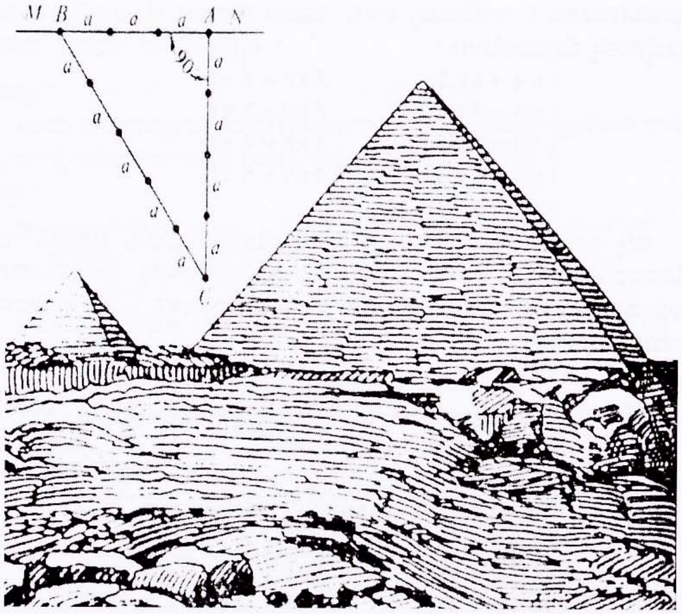
ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ 14 ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆ :

12 x 42 = 21 x 24	23 x 96 = 32 x 69
12 x 63 = 21 x 36	24 x 63 = 42 x 36
12 x 84 = 21 x 48	24 x 84 = 42 x 48
13 x 62 = 31 x 26	26 x 93 = 62 x 39
13 x 93 = 31 x 39	34 x 86 = 43 x 68
14 x 82 = 41 x 28	36 x 84 = 63 x 48
23 x 64 = 32 x 46	46 x 96 = 64 x 69

ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಭೂ ಸರ್ವೇಕ್ಷಣೆ ನಡೆಸುವವರು ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಬಳಸುವ ನಿಖರವಾದ ಹಾಗೂ ಅನುಕೂಲವಾದ ವಿಧಾನವೊಂದು ಹೀಗಿದೆ. MN ಸರಳ ರೇಖೆಗೆ A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಲಂಬರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 22). ಇದನ್ನು ಎಳೆಯಲು, A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ AM ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ a ಎಂಬ ಅಂತರದ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿರುವ B ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಅನಂತರ ಹಗ್ಗವೊಂದರಲ್ಲಿ ಮೂರು ಗಂಟುಗಳನ್ನು ಹಾಕಿ; ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯದ ಗಂಟು ಒಂದು ಗಂಟಿನಿಂದ 4a ದೂರವಿದ್ದು, ಇನ್ನೊಂದು ಗಂಟಿನಿಂದ 5a ದೂರವಿರಬೇಕು. ಈಗ ತುದಿಯ ಎರಡು ಗಂಟುಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿ. ಬಳಿಕ ಮಧ್ಯದ ಗಂಟನ್ನು ಹಿಡಿದು ಹಗ್ಗವನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಾಕಾರಕ್ಕೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ರಚಿಸಲ್ಪಡುವ ತ್ರಿಕೋನಾಕೃತಿಯು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಬಹುಶಃ ಸಾವಿರಾರು ವರ್ಷಗಳ ಮುನ್ನ ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಪಿರಮಿಡ್ಡುಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದವರು ಈ ವಿಧಾನ ಬಳಸಿರಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಾಚೀನ ವಿಧಾನದ ಆಧಾರ ತತ್ವವು ಸುಪರಿಚಿತ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದಂತೆ ಹೀಗಿದೆ : ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹುಗಳು 3:4:5 ರ



ಚಿತ್ರ 22

ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ,

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

ಈ ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳಂತೆ, ಇಂತಹ ಸಂಬಂಧ ಹೊಂದಿರುವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಅಸಂಖ್ಯವಾಗಿವೆ. ಇಂಥ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು a, b, c ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿ, ಈ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು :

$$a^2+b^2=c^2.$$

ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವೊಂದರ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಲ್ಲವು. ಆಗ 'a' ಮತ್ತು 'b' ಗಳನ್ನು ಆ ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹುಗಳೆಂದೂ, c ಯನ್ನು ವಿಕರ್ಣವೆಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

a, b, c ಎಂಬವು ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ತ್ರಿವಳಿಗಳಾದರೆ (ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ತ್ರಿವಳಿ) p ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕದಿಂದ ಇವನ್ನು ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ pa, pb, pc ಗುಣಲಬ್ಧಗಳೂ ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಿದ್ದರೆ, ಅದರಿಂದ ಆ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಮೂರು ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೂ ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ತ್ರಿವಳಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. (ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು

ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗುಣಕ p ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಇಂತಹ ಇತರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು).

ಈಗ ಇಂಥ a, b, c ತ್ರಿವಳಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಇನ್ನೊಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಆಗಿರುತ್ತದೆಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿರೋಧೋಕ್ತಿಯು ನಿಜವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, a ಮತ್ತು b ಎರಡೂ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, $a^2 + b^2$ ಕೂಡ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ, ಇದರಿಂದಾಗಿ ಕರ್ಣವೂ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೀಗ, a, b, c ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಇರುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ; ಏಕೆಂದರೆ, ಮೂರು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ 2 ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದಾದರೂ ಬಾಹು a ಅಥವಾ b, ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಇದಲ್ಲದೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಸಾಧ್ಯತೆಯೂ ಇದೆ : ಎರಡು ಬಾಹುಗಳೂ ಬೆಸವಾಗಿದ್ದು, ಕರ್ಣವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವುದು. ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವುದು ಸುಲಭ. ಈ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಸೂಚಿಸೋಣ :

$2x+1$ ಮತ್ತು $2y+1$,

ಈಗ ಇವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ :

$$4x^2+4x+1+4y^2+4y+1=4(x^2+x+y^2+y)+2,$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 4ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ 2 ಶೇಷವಾಗಿ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, ಯಾವುದೇ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು 4ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಲೇಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಯಾವುದೇ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಊಹಿಸಿದ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, a ಮತ್ತು b ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮವೂ ಇನ್ನೊಂದು ಬೆಸವೂ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ a^2+b^2 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಬೆಸವಾಗಿ, ಕರ್ಣ 'c' ಕೂಡ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಇದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸೋಣ ಬಾಹು 'a' ಬೆಸವೆಂದೂ ಬಾಹು 'b' ಸಮವೆಂದೂ ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಮುನ್ನ ಸೂಚಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣ

$$a^2+b^2=c^2$$

ಇದರಿಂದ ತಕ್ಷಣವೇ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b).$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯ ಗುಣಕಗಳಾದ $(c+b)$ ಮತ್ತು $(c-b)$ ಇವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದರ ಸತ್ಯಾಂಶ ಸಾಧನೆಗೆ ಅವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಲ್ಲವಾದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ. ಈಗ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ, ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಹಾಗೂ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

ಮೊತ್ತ $(c+b)+(c-b) = 2c$

ವ್ಯತ್ಯಾಸ $(c+b)-(c-b) = 2b$

ಗುಣಲಬ್ಧ $(c+b)(c-b) = a^2$,

ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ, $(c + b)$ ಮತ್ತು $(c - b)$ ಇವುಗಳಿಗೆ ಅಂಕಿ ಒಂದರ ಹೊರತಾಗಿ ಬೇರಾವುದೇ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಅಪವರ್ತನದಿಂದ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ,

ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ; ಅಂದರೆ, 2c, 2b ಹಾಗೂ a ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವೊಂದು ಇರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, 'a' ಎಂಬುದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ, ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ಅಪವರ್ತನವು 2 ಅಲ್ಲವೇ ಅಲ್ಲ. ಇದೇ ಕಾರಣಕ್ಕಾಗಿ, ಆ ಅಪವರ್ತನವು 'a', 'b', 'c' ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, ಹೀಗಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಈ ವಿರೋಧಾಭಾಸ ನಿವಾರಣೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ, $(c+b)$ ಮತ್ತು $(c-b)$ ಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಎರಡು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾದರೆ, ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಥವಾ,

$$\begin{cases} c+b = m^2, \\ c-b = n^2. \end{cases}$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ :

$$c = \frac{m^2+n^2}{2},\ b = \frac{m^2-n^2}{2},$$

$$a^2 = (c+b)(c-b) = m^2n^2,\ a = mn.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವೀಗ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ತ್ರಿವಳಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಕೇತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಹೀಗಿರುತ್ತದೆ :

$$a = mn,\ b = \frac{m^2-n^2}{2},\ c = \frac{m^2+n^2}{2}$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ m ಮತ್ತು n ಗಳು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಇದರ ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧ್ಯತೆಯನ್ನು ಓದುಗರು ತಾವೇ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು: m ಮತ್ತು n ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ, a, b, c ಎಂಬ ಮೂರು ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, m ಮತ್ತು n ಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಹಲವು ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ತ್ರಿಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮುಂದಿವೆ :

m=3,	n=1	ಆದಾಗ	$3^2 + 4^2 = 5^2$
m=5,	n=1	ಆದಾಗ	$5^2+12^2 = 13^2$
m=7,	n=1	ಆದಾಗ	$7^2+24^2 = 25^2$
m=9,	n=1	ಆದಾಗ	$9^2+40^2 = 41^2$
m=11,	n=1	ಆದಾಗ	$11^2+60^2 = 61^2$
m=13,	n=1	ಆದಾಗ	$13^2+84^2 = 85^2$
m=5,	n=3	ಆದಾಗ	$15^2 + 8^2 = 17^2$
m=7,	n=3	ಆದಾಗ	$21^2+20^2 = 29^2$
m=11,	n=3	ಆದಾಗ	$33^2+56^2 = 65^2$
m=13,	n=3	ಆದಾಗ	$39^2+80^2 = 89^2$
m=7,	n=5	ಆದಾಗ	$35^2+12^2 = 37^2$

m=9,	n=5	ಆದಾಗ	$45^2+28^2 = 53^2$
m=11,	n=5	ಆದಾಗ	$55^2+48^2 = 73^2$
m=13,	n=5	ಆದಾಗ	$65^2+72^2 = 97^2$
m=9,	n=7	ಆದಾಗ	$63^2+16^2 = 65^2$
m=11,	n=7	ಆದಾಗ	$77^2+36^2 = 85^2$

ಇತರ ಎಲ್ಲ ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಅಥವಾ 100 ಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಹಲವು ಕುತೂಹಲಕಾರಿ ಲಕ್ಷಣಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಈ ಲಕ್ಷಣಗಳ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಿಲ್ಲ.

1. ಬಾಹುಗಳಲ್ಲೊಂದು ಮೂರರ ಗುಣಕವಾಗಿರಬೇಕು.
2. ಬಾಹುಗಳಲ್ಲೊಂದು ನಾಲ್ಕರ ಗುಣಕವಾಗಿರಬೇಕು.
3. ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲೊಂದು ಐದರ ಗುಣಕವಾಗಿರಲೇಬೇಕು.

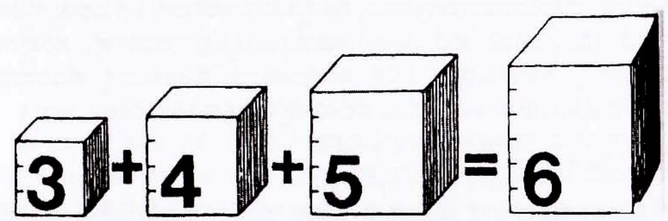
ಈ ಮೇಲೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿರುವ ಪೈಥಾಗೊರಿಯನ್ ಸಂಖ್ಯೆಗಳತ್ತ ಕಣ್ಣು ಹಾಯಿಸಿದರೆ ಈ ಲಕ್ಷಣಗಳು ಸತ್ಯವೆಂಬುದು ಓದುಗರಿಗೆ ಮನವರಿಕೆಯಾಗುವುದು.

ಮೂರನೆಯ ಸ್ತರದ ಒಂದು ಅನಿರ್ಧರಣೀಯ (Indeterminate) ಸಮೀಕರಣ

ಮೂರು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತವು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೊಂದರ ಘನವಾಗಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

ಇದರ ವಿವರಣೆ : 6 ಸೆ.ಮೀ. ಪಾರ್ಶ್ವದ ಘನದ ಗಾತ್ರವು 3 ಸೆ.ಮೀ., 4 ಸೆ.ಮೀ. ಮತ್ತು 5 ಸೆ.ಮೀ. ಪಾರ್ಶ್ವಗಳ ಘನಗಳ ಗಾತ್ರಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 23).



ಚಿತ್ರ 23

ಈ ಸಂಬಂಧವು ಪ್ಲೇಟೋನ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಬಹಳ ಕೆರಳಿಸಿತೆಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ.

ಇಂತಹ ಇತರ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣ ರಚಿಸಿ, ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಹುಡುಕೋಣ :

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3.$$

ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಅಪರಿಚಿತ u ಅನ್ನು $-t$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಈಗ, ಈ ಸಮೀಕರಣ ಪಡೆಯುವ ಸರಳ ರೂಪ :

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು (ಧನ ಮತ್ತು ಋಣ) ಉತ್ತರಗಳಾಗಬಲ್ಲವು; ಅವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನೆರವಾಗುವ ವಿಧಾನವೊಂದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈಗ a, b, c, d ಮತ್ತು $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಈ ಸಂಖ್ಯಾಚತುಷ್ಟಯಗಳು ಸಮೀಕರಣದ ಉತ್ತರಗಳೆಂದಿರಲಿ. ಮೊದಲ ಚತುಷ್ಟಯದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ಚತುಷ್ಟಯದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ; ಈಗ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು k ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ (ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಈ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುವಂತೆ k ಯನ್ನು ಆಯ್ಕೆಮಾಡಲು ಯತ್ನಿಸೋಣ). ಈಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು :

$$a+k\alpha,\ b+k\beta,\ c+k\gamma,\ d+k\delta$$

ಅರ್ಥಾತ್, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧವು ನಿಜವಾಗುವಂತೆ ನಾವು k ಯನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕು:

$$(a+k\alpha)^3+(b+k\beta)^3+(c+k\gamma)^3+(d+k\delta^3)=0.$$

ಈಗ ಆವರಣಗಳನ್ನು ತೆರೆಯೋಣ. ಬಳಿಕ, a, b, c, d ಮತ್ತು $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ಇವು ಆ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ ಎಂದು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಇವುಗಳ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತವೆ :

$$a^3+b^3+c^3+d^3=0,\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=0,$$

ಈಗ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$3a^2k\alpha+3ak^2\alpha^2+3b^2k\beta+3bk^2\beta^2+$$
$$3c^2k\gamma+3ck^2\gamma^2+3d^2k\delta+3dk^2\delta^2=0$$

ಅಥವಾ

$$3k[(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta)+k(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2)]=0.$$

ಯಾವುದೇ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಶೂನ್ಯವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಅದರ ಒಂದಾದರೂ ಗುಣಕ ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರಬೇಕು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಕವನ್ನೂ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸಿದರೆ, kಗೆ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಬೆಲೆ, $k = 0$ ನಮಗೆ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ; ಅರ್ಥಾತ್, ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಯಾವುದನ್ನೂ ಕೂಡಿಸದಿದ್ದರೆ, ಫಲಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ a,b,c,dಯ kಎರಡನೆಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಅದು :

$$k = -\frac{a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta}{a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2}.$$

ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯಾ ಚತುಷ್ಟಯಗಳು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ, ಹೊಸ ಚತುಷ್ಟಯವನ್ನು ಪತ್ತೆಮಾಡಬಹುದು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ, ಮೊದಲ ಚತುಷ್ಟಯದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಎರಡನೆಯ ಚತುಷ್ಟಯದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿದ k ಯ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ಈ ವಿಧಾನ ಬಳಸಬೇಕಾದರೆ, ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯಾ ಚತುಷ್ಟಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿದಿರುವುದು ಅವಶ್ಯ. ಈಗಾಗಲೇ ನಮಗೊಂದು ಚತುಷ್ಟಯ ಗೊತ್ತಿದೆ : (3, 4, 5, –6). ಇನ್ನೊಂದು ಚತುಷ್ಟಯವನ್ನು ಹೇಗೆ ಪಡೆಯುವುದು ? ಇದು

ಬಹಳ ಸುಲಭ. ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಹೊಂದುವ $r, -r, s, -s$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಚತುಷ್ಟಯಕ್ಕಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಅರ್ಥಾತ್ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಹೀಗಿರಲಿ :

$$a=3,\ b=4,\ c=5,\ d=-6,$$
$$\alpha=r,\ \beta=-r,\ \gamma=s,\ \delta=-s.$$

ಈಗ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ kಯ ಬೆಲೆ ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಅದನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ :

$$k=-\frac{-7r-11s}{7r^2-s^2}=\frac{7r+11s}{7r^2-s^2},$$

ಇದರಿಂದ, $a+k\alpha, b+k\beta, c+k\gamma, d+k\delta$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು. ಅವು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ :

$$\frac{28r^2+11rs-3s^2}{7r^2-s^2},\quad \frac{21r^2-11rs-4s^2}{7r^2-s^2},$$

$$\frac{35r^2+7rs+6s^2}{7r^2-s^2},\quad \frac{-42r^2-7rs-5s^2}{7r^2-s^2}.$$

ಈ ಮುನ್ನ ನೀಡಿದ ವಿವರಣೆಗಳ ಪ್ರಕಾರ, ಈ 4 ಬೆಲೆಗಳು ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ :

$$x^3+y^3+z^3+t^3=0.$$

ಈ ನಾಲ್ಕು ಬೆಲೆಗಳ ಛೇದಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವನ್ನು ಕಳಚಬಹುದು (ಅರ್ಥಾತ್, ಈ ಬೆಲೆಗಳ ಅಂಶಗಳೂ ಆ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ). ಇವನ್ನೆಲ್ಲ ಕ್ರೋಢೀಕರಿಸಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (r ಮತ್ತು s ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ) ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದುತ್ತವೆ :

$$x = 28r^2+11rs-3s^2,$$
$$y = 21r^2-11rs-4s^2,$$
$$z = 35r^2+7rs+6s^2,$$
$$t = -42r^2-7rs-5s^2.$$

ಈ ಬೆಲೆಗಳ ಘನಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಕೂಡಿಸಿದರೆ ಇದು ನಿಜವೆಂದು ಮನದಟ್ಟಾಗುತ್ತದೆ. ಬಳಿಕ, r ಮತ್ತು s ಗಳಿಗೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳನ್ನಿತ್ತು, ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದುವ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಉತ್ತರಗಳ ಸರಣಿಯನ್ನೇ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ರೀತಿ ಮಾಡುವಾಗ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ ಗುಣಕವಿದ್ದರೆ, ಅದನ್ನು ಭಾಗಿಸಿ ತೆಗೆದುಬಿಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $r=1, s=1$, ಎಂದಾದರೆ, x, y, z, t ಗಳಿಗೆ ದೊರಕುವ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ, 36, 6, 48, –54. ಅಥವಾ, ಇದನ್ನು 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, 6, 1, 8, –9. ಈ ಪ್ರಕಾರ,

$$6^3 + 1^3 + 8^3 = 9^3.$$

ಇಂತಹ ಹಲವು ಸಮಾನತೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಲಾಗಿದೆ (ಸಮಾನ ಗುಣಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಸಿಕ್ಕಿದ ಬೆಲೆಗಳು) :

r=1,	s=2	ಆದಾಗ	$38^3+73^3=17^3+76^3$
r=1,	s=3	ಆದಾಗ	$17^3+55^3=24^3+54^3$
r=1,	s=5	ಆದಾಗ	$4^3+110^3=67^3+101^3$
r=1,	s=4	ಆದಾಗ	$8^3+53^3=29^3+50^3$
r=1,	s=–1	ಆದಾಗ	$7^3+14^3+17^3=20^3$
r=1,	s=–2	ಆದಾಗ	$2^3+16^3=9^3+15^3$
r=2,	s=–1	ಆದಾಗ	$29^3+34^3+44^3=53^3$

....

ಮೂಲಚತುಷ್ಟಯವಾದ 3, 4, 5, –6 ಅಥವಾ ಈ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಹೊಸ ಚತುಷ್ಟಯಕ್ಕೆ ಈ ವಿಧಾನ ಅನ್ವಯಿಸಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ, ಹೊಸ ಉತ್ತರಗಳ ಸಮೂಹವೇ ಸಿಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 3, 5, 4, –6 ಚತುಷ್ಟಯಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ (ಅರ್ಥಾತ್, $a=3, b=5, c=4, d=-6$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ)ದಾಗ, x, y, z, t ಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ :

$$x=20r^2+10rs-3s^2,$$
$$y=12r^2-10rs-5s^2,$$
$$z=16r^2+8rs+6s^2,$$
$$t=-24r^2-8rs-4s^2.$$

ಇವುಗಳಿಂದ, r ಮತ್ತು s ಗಳ ವಿಭಿನ್ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯಾ ಸಂಬಂಧಗಳ ಸಮೂಹ ಸಿಗುತ್ತದೆ :

r=1,	s=1	ಆದಾಗ	$9^3+10^3=1^3+12^3$
r=1,	s=3	ಆದಾಗ	$23^3+94^3=63^3+84^3$
r=1,	s=5	ಆದಾಗ	$5^3+163^3+164^3=206^3$
r=1,	s=6	ಆದಾಗ	$7^3+54^3+57^3=70^3$
r=2,	s=1	ಆದಾಗ	$23^3+97^3+86^3=116^3$
r=1,	s=–3	ಆದಾಗ	$3^3+36^3+37^3=46^3$

ಇವಲ್ಲದೆ ಇನ್ನಿತರ ಉತ್ತರಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅನಂತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯದ ಪುರಾವೆಗೆ ಲಕ್ಷ ರೂ. ಬಹುಮಾನ

ಅನಿರ್ಧರಣೀಯ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದರ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 100 000 ಜರ್ಮನ್ ಮಾರ್ಕ್‌ಗಳ ಬಹುಮಾನ ಘೋಷಿಸಿದ್ದರಿಂದ (ಮೃತ್ಯು ಪತ್ರದಲ್ಲಿ), ಆ ಸಮಸ್ಯೆ ಪ್ರಸಿದ್ಧವಾಯಿತು. ಅದು "ಫರ್ಮಾನ ಕೊನೆಯ ಪ್ರಮೇಯ."

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಬೇಕೆಂಬುದೇ ಆ ಸಮಸ್ಯೆ.

ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಸಮಾನ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮೂರನೆಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ತತ್ಸಮಾನ ಘಾತವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಇದರ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಿನಾಯ್ತಿ ಎರಡನೆಯ ಘಾತ; ಯಾಕೆಂದರೆ ಎರಡನೆಯ ಘಾತದಲ್ಲಿ ಇದು ಸಾಧ್ಯ.

ಅರ್ಥಾತ್, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ, $n>2$ ಆದಾಗ, ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ :

$$x^n+y^n=z^n$$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಉತ್ತರಗಳಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ :

$$x^2+y^2=z^2,$$
$$x^3+y^3+z^3=t^3$$

ಆದರೆ, $x^3+y^3=z^3$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಹೊಂದುವ ಮೂರು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆ ಮಾಡಲು ಯತ್ನಿಸಿದರೆ, ನಿಮ್ಮೆಲ್ಲ ಪ್ರಯತ್ನ ವ್ಯರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ, ನಾಲ್ಕನೆಯ, ಐದನೆಯ, ಆರನೆಯ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ಘಾತದ ಇಂಥ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದು ಅಸಾಧ್ಯ. ಇದುವೇ ಫರ್ಮಾನ ಮಹಾಪ್ರಮೇಯದ ಸಾರಾಂಶ.

ಈ ಬಹುಮಾನ ಗೆಲ್ಲಲು ಇಚ್ಛಿಸುವವರು ಮಾಡಬೇಕಾದುದೇನು? ಈ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಯು ಯಾವೆಲ್ಲ ಘಾತಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆಯೋ ಅವೆಲ್ಲದಕ್ಕೂ ಇದನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಫರ್ಮಾನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಇನ್ನೂ ಸಮರ್ಥಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬುದೇ ಗಮನಾರ್ಹ ವಿಷಯ.

ಅದನ್ನು ಮೊದಲು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಮೂರು ಶತಮಾನಗಳು ದಾಟಿವೆ, ಈ ತನಕ ಗಣಿತ ಪರಿಣತರಿಗೆ ಅದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿಲ್ಲ.*

ಹಲವು ಅಪ್ರತಿಮ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಘಾತಸೂಚಕಗಳಿಗೆ ಅಥವಾ ಕೆಲವು ಘಾತಸೂಚಕಗಳ ಗುಂಪಿನ ಬಗ್ಗೆ ಸಾಧಿಸಿರುವುದೇ ಅವರ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಸಾಧನೆ. ಆದರೆ, ಯಾವುದೇ ಘಾತಸೂಚಕಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮರ್ಥನೆ ಶೋಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಮರ್ಥನೆಯು ಒಂದು ಕಾಲದಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿತ್ತೆಂದು ತೋರಿಬಂದರೂ ಅನಂತರ ಕಳೆದುಹೋಯಿತೆಂಬುದೇ ವಿಶೇಷ ಸಂಗತಿ. ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಿದ ಫರ್ಮಾ** 17ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನಿ. ತನಗೆ ಇದರ ಸಮರ್ಥನೆ ತಿಳಿದಿದೆ ಎಂದಾತ ಬರೆದಿಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಡೈಯೊಫಾಂಟಸ್‌ನ ಪುಸ್ತಕವೊಂದರ ಬದಿಯಲ್ಲಿ. ಈ "ಮಹಾ" ಪ್ರಮೇಯ ಬರೆದಿಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. (ಸಂಖ್ಯಾ ಪ್ರಮೇಯ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಇತರ ಹಲವು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಅವನು ಇದೇ ರೀತಿ ಬರೆದಿಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ). ಜೊತೆಗೇ ಹೀಗೆ ಬರೆದಿದ್ದಾನೆ : "ನಾನು ನಿಜಕ್ಕೂ ಅದ್ಭುತವಾದ ಸಮರ್ಥನೆಯೊಂದನ್ನು ಶೋಧಿಸಿದ್ದೇನೆ; ಅದನ್ನು ಬರೆಯಲು ಇಲ್ಲಿರುವ ಜಾಗ ಸಾಲದಾಗಿದೆ."

---

* ಈಗ ಫರ್ಮಾನ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿಪಾದನೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಆಂಡ್ರ್ಯೂ ವೈಲ್ಸ್ ಎಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದು 1994ರಲ್ಲಿ. – *ಸಂಪಾದಕರು*

** ಫರ್ಮಾ (1603–1665) ವೃತ್ತಿಪರ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನಿಯಲ್ಲ. ಅವನು ನ್ಯಾಯಶಾಸ್ತ್ರ ಕಲಿತು, ಪಾರ್ಲಿಮೆಂಟಿನ ಕೌನ್ಸಿಲರ್ ಆಗಿದ್ದ; ಬಿಡುವಿನ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಸಂಶೋಧನೆ ನಡೆಸುತ್ತಿದ್ದ. ಆದರೂ ಅವನು ಹಲವು ಪ್ರಚಂಡ ಸಂಶೋಧನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ; ಆಗಿನ ಕಾಲದ ರೂಢಿಯಂತೆ ಅವನು ಅವುಗಳನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಲಿಲ್ಲ (ಆಗಿನ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಮ್ಯಾಗಜೀನ್ ಇರಲಿಲ್ಲ.); ಬದಲಾಗಿ, ಫಾಸ್ಕಲ್, ಡೆಸ್‌ಕಾರ್ಟೆಸ್, ಹೂಯ್ಗೆನ್ಸ್, ರೊಬರ್‌ವಾಲ್ ಮುಂತಾದ ವಿಜ್ಞಾನಿ ಗೆಳೆಯರಿಗೆ ಬರೆದ ಪತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿದ.

ಈ ಸಮರ್ಥನೆ ಎಲ್ಲೂ ಸಿಕ್ಕಿಲ್ಲ; ಈ ಮಹಾ ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನಿಯ ಬರಹಗಳಲ್ಲಾಗಲೀ, ಪತ್ರಗಳಲ್ಲಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಬೇರೆಲ್ಲಾಗಲೀ ಇದು ಕಂಡುಬಂದಿಲ್ಲ.

ಫರ್ಮಾನ ಬಳಿಕದ ಗಣಿತ ಪರಿಣತರು ತಮ್ಮದೇ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕಾಯಿತು.

ಈ ಪ್ರಯತ್ನಗಳ ವಿವರ ಇಲ್ಲಿದೆ : ಮೂರನೆಯ ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಘಾತಸೂಚಕಗಳಿಗೆ ಫರ್ಮಾನ ಪ್ರಮೇಯ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆಂದು ಆಯ್ಲರ್ (1797) ಸಮರ್ಥಿಸಿದ; ಐದನೆಯ ಘಾತಸೂಚಕಕ್ಕೆ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆಂದು ಲೆಜೆಂಡ್ರೆ (1823) ಸಾಧಿಸಿದ; ಏಳನೆಯ ಘಾತಸೂಚಕಕ್ಕೆ* ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆಂದು ಲೇಮ್ ಮತ್ತು ಲೆಬೆಸ್‌ಗ್ಯು (1840) ಸಾಧಿಸಿದರು; ವಿಸ್ತೃತ ಘಾತಸೂಚಕಗಳ ಸರಣಿಗೆ ಈ ಪ್ರಮೇಯ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆಂದು 1849ರಲ್ಲಿ ಕುಮ್ಮರ್ ಸಮರ್ಥಿಸಿದ; ಜೊತೆಗೆ ದೊರೆತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಎಲ್ಲ ಘಾತಸೂಚಕಗಳಿಗೂ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದ. ಈ ಸಂಶೋಧನೆಗಳು ಫರ್ಮಾ ತಿಳಿದಿದ್ದ ಗಣಿತ ಪ್ರಪಂಚದ ಎಲ್ಲೆಗಳನ್ನೇ ದಾಟಿವೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮರ್ಥನೆಯೊಂದನ್ನು ಫರ್ಮಾ ಶೋಧಿಸಿದುದು ಹೇಗೆಂಬುದು ವಿಸ್ಮಯಕಾರಿ ವಿಷಯವಾಗಿದೆ; ಅವನು ತಪ್ಪಾಗಿ ತಿಳಿದಿರಲೂಬಹುದು.

ಫರ್ಮಾನ ಪ್ರಮೇಯದ ಚರಿತ್ರೆ ಮತ್ತು ಆ ಬಗ್ಗೆ ಇತ್ತೀಚೆಗಿನ ಬೆಳವಣಿಗೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಆಸಕ್ತಿಯಿದ್ದರೆ ಎ. ಯ. ಖಿನ್‌ಚಿನ್ನನ *ಫರ್ಮಾನ ಮಹಾ ಪ್ರಮೇಯ (Fermat's Great Theory)* ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವಿವರಗಳು ಲಭ್ಯವಿವೆ. ಗಣಿತದ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಜ್ಞಾನವಿರುವವರೂ ಇದನ್ನು ಓದಬಹುದು.

■

---

* ಸಂಯುಕ್ತ ಘಾತಸೂಚಕಗಳಿಗೆ ವಿಶೇಷ ಸಮರ್ಥನೆ ಅವಶ್ಯವಿಲ್ಲ (4ರ ಹೊರತಾಗಿ); ಇವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಘಾತಸೂಚಕಗಳಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಅಧ್ಯಾಯ – ಐದು

ವರ್ಗಮೂಲ : ಆರನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ

ಆರನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ

ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರ ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ವಿಲೋಮ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿವೆ, ಅವು ಕ್ರಮವಾಗಿ ವ್ಯವಕಲನ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ. ಐದನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಕ್ಕೆ (ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಘಾತಕ್ಕೇರಿಸುವುದು) ಎರಡು ವಿಲೋಮ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿವೆ : ಘಾತ ಮೂಲ (ವರ್ಗಮೂಲ) ಪತ್ತೆ ಮಾಡುವುದು ಮತ್ತು ಘಾತಾಂಕ ಪತ್ತೆ ಮಾಡುವುದು. ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೇ ಆರನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ. ಇದನ್ನು ಘಾತ ಮೂಲದ ಗುರುತಿಸುವಿಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಘಾತಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೇ ಏಳನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ. ಇದನ್ನು ಲಾಗರಿತಮ್‌ಗಳ ಗುರುತಿಸುವಿಕೆ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳಿಗೆ ಒಂದೊಂದೇ ವಿಲೋಮ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿರುವಾಗ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸುವ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಎರಡು ಎರಡು ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿರಲು ಕಾರಣವೇನೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಪದಗಳು (ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ) ಸಮಾನ ಘಾತದಲ್ಲಿದ್ದು ಅವುಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಬಹುದು. ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದರೆ, ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸುವ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನ ಘಾತದಲ್ಲಿ ಇರುವುದಿಲ್ಲ, ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಅವನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ $3^5 \neq 5^3$). ಈ ಕಾರಣ ದಿಂದಾಗಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಬಳಕೆಯಾಗುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪತ್ತೆ ಮಾಡಲು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ವಿಧಾನ ಬಳಸಲಾಗುವುದು, ಆದರೆ ಘಾತ ಮೂಲ ಪತ್ತೆ ಮಾಡಲು ಮತ್ತು ಘಾತಾಂಕ ಪತ್ತೆಮಾಡಲು ಭಿನ್ನ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುವುದು.

ಆರನೆಯ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು (ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು) $\sqrt{\ }$ ಈ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಕೇತವು ಮೂಲ ಎಂಬರ್ಥದ ರ್‍ಯಾಡಿಕ್ಸ್ ಎಂಬ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಪದದ ಮೊದಲ ಅಕ್ಷರ r ನ ಪರಿವರ್ತಿತ ರೂಪ ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಿರುವ ವಿಷಯವಲ್ಲ. ಹದಿನಾರನೆಯ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮೂಲ ಸೂಚಿಸಲು ಬೇರೆ ಸಂಕೇತ ಬಳಸ ಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಕ್ಯಾಪಿಟಲ್ ಅಕ್ಷರ R ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಶಬ್ದಗಳಾದ ಕ್ವಾಡ್ರಟಸ್ ಇದರ ಮೊದಲಕ್ಷರ (q) ಮತ್ತು ಕ್ಯೂಬಸ್ ಇದರ ಮೊದಲಕ್ಷರ (c) ಗಳನ್ನು ಬರೆದು ಘಾತ ಮೂಲವೆಂದು ಸೂಚಿಸ ಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಪತ್ತೆ ಮಾಡಬೇಕಾದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಘಾತ ಮೂಲ ಯಾವುದೆಂದು ಸೂಚಿಸಲು ಈ ರೀತಿ ಮಾಡಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು.* ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sqrt{4352}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು :

---

* 18ನೆಯ ಶತಮಾನದ ಪೂರ್ವಾರ್ಧದಲ್ಲಿ ರಷ್ಯದಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತೃತವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಾಗುತ್ತಿದ್ದ ಮ್ಯಾಗ್ನಿತ್‌ಸ್ಕಿಯ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮೂಲ ಪತ್ತೆ ಮಾಡುವ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಬಳಸಿಲ್ಲ.

R.q.4352

ಆ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ ಸೂಚಿಸುವ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿರಲಿಲ್ಲ (ಅವನ್ನು p, ಮತ್ತು m ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು). ಇದಲ್ಲದೆ ಆವರಣಗಳನ್ನು ⌊ ⌋ ಈ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಇವನ್ನೆಲ್ಲ ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಂಡರೆ, ಈಗ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತದ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿಗಿಂತಲೂ ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ತೊಡಕಿನವಾಗಿದ್ದವು ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತ ವಿಜ್ಞಾನಿ ಬೊಂಬೆಲ್ಲಿ (1572) ಬರೆದ ಪುಸ್ತಕದಿಂದ ಆಯ್ದ ಆಗಿನ ಕಾಲದ ಗಣಿತ ಬರಹದ ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದು ಇಲ್ಲಿದೆ :

R.c.⌊R.q.4352 p.16⌋m.R.c.⌊R.q.4352 m.16⌋

ಇದನ್ನು ಆಧುನಿಕ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}$$

$\sqrt[n]{a}$ ಎಂದು ಚಿಹ್ನೆಯ ಮೂಲಕ ಬರೆಯುವ ಬದಲು $a^{\frac{1}{n}}$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯುವುದೇ ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವರ್ಗಮೂಲವೂ, ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಘಾತಾಂಕವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಟ್ಟುವಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಹದಿನಾರನೆಯ ಶತಮಾನದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಫ್ಲೆಮಿಶ್ ಇಂಜಿನಿಯರ್ ಮತ್ತು ಗಣಿತ ಪರಿಣತನಾದ ಸೈಮನ್ ಸ್ಟೆವಿನ್ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬಳಕೆಗೆ ತಂದನು.

ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು ?

ಸಮಸ್ಯೆ 1

$(\sqrt[5]{5})$ ಹಾಗೂ $\sqrt{2}$ – ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು ?

ಇದನ್ನು ಹಾಗೂ ಈ ಮುಂದಿನ ಇತರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ವರ್ಗಮೂಲದ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟೆಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕದೆಯೇ ಬಿಡಿಸಬೇಕು :

ಉತ್ತರ :

ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 10ನೆಯ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ದೊರಕುವುದು

$$(\sqrt[5]{5})^{10}=5^2=25, \quad (\sqrt{2})^{10}=2^5=32$$

ಈಗ $32>25$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$$

ಸಮಸ್ಯೆ 2 :

$\sqrt[4]{4}$ ಹಾಗೂ $\sqrt[7]{7}$ – ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು ?

ಉತ್ತರ :

ಎರಡನ್ನೂ 28ನೆಯ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದಾಗ,

$$(\sqrt[4]{4})^{28}=4^7=2^{14}=2^7\times 2^7=128^2,$$
$$(\sqrt[7]{7})^{28}=7^4=7^2\times 7^2=49^2.$$

ಈಗ $128>49$ ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\sqrt[4]{4}>\sqrt[7]{7}.$$

ಸಮಸ್ಯೆ 3 :

$\sqrt{7}+\sqrt{10}$ ಮತ್ತು $\sqrt{3}+\sqrt{19}$ – ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದೆಂದು ಪತ್ತೆ ಮಾಡಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದಾಗ,

$$(\sqrt{7}+\sqrt{10})^2=17+2\sqrt{70},$$
$$(\sqrt{3}+\sqrt{19})^2=22+2\sqrt{57}.$$

ಈಗ ಎರಡೂ ಪದಗಳಿಂದ 17 ಕಳೆದರೆ, ಇವು ದೊರಕುತ್ತವೆ :

$2\sqrt{70}$ ಮತ್ತು $5+2\sqrt{57}$.

ಇವನ್ನು ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಫಲಿತಗಳು :

280 ಹಾಗೂ $253+20\sqrt{57}$.

ಈ ಎರಡೂ ಪದಗಳಿಂದ 253 ಕಳೆದು ಇವನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ :

27 ಹಾಗೂ $20\sqrt{57}$.

$\sqrt{57}$ ಎಂಬುದು 2 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ್ದರಿಂದ, $20\sqrt{57}>40$; ಈ ಪ್ರಕಾರ,

$$\sqrt{3}+\sqrt{19}>\sqrt{7}+\sqrt{10}.$$

ಒಮ್ಮೆ ಕಣ್ಣಾಡಿಸಿ ಉತ್ತರಿಸಿ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಗಮನಿಸಿ :

$$x^{x^3}=3$$

ಈಗ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ತಕ್ಷಣ ಹೇಳಿ.

ಉತ್ತರ :

ಬೀಜಗಣಿತದ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಪರಿಚಯವುಳ್ಳ ಯಾರಿಗಾದರೂ ಈ ಉತ್ತರ ಹೊಳೆಯುತ್ತದೆ :

$$x=\sqrt[3]{3}.$$

ಏಕೆಂದರೆ,

$$x^3=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3=3$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಉತ್ತರ :

$$x^{x^3}=x^3=3,$$

ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿ "ಒಮ್ಮೆ ಕಣ್ಣಾಡಿಸಿ" ಬಿಡಿಸಲಾರದವರು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.

$x^3=y$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ,

$$x=\sqrt[3]{y}.$$

ಇದರಿಂದ ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣ ಈ ರೂಪ ಪಡೆಯುತ್ತದೆ :

$$\left(\sqrt[3]{y}\right)^{y}=3$$

ಇದನ್ನು ಘನಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದಾಗ,

$$y^{y}=3^{3}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ $y=3$ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಹಾಗಾಗಿ,

$$x=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{3}.$$

ಬೀಜಗಣಿತದ ನಗೆಚಾಟಿಕೆಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ 1 :

ಅರನೆಯ ಪರಿಕರ್ಮದ ಮೂಲಕ $2 \times 2 = 5$, $2 = 3$ ಎಂಬಂತಹ ನಗೆ ಚಾಟಿಕೆಗಳನ್ನೂ ವಿರೋಧಾಭಾಸಗಳನ್ನೂ ರೂಪಿಸಬಹುದು. ಈ ಗಣಿತ ಚಮತ್ಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಮೋಜಿಗೆ ಕಾರಣವಾಗುವ ತಪ್ಪು – ಇದು ತೀರಾ ಪ್ರಾಥಮಿಕವಾದುದು – ತಲೆಮರೆಸಿಕೊಂಡಂತಿದ್ದು ತಟ್ಟನೆ ಗೋಚರಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಬೀಜಗಣಿತದ ಈ ಬಗೆಯ ಪ್ರಹಸನ ಕೋಶದಿಂದ ಎರಡು ನಿದರ್ಶನಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮೊದಲಿಗೆ ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

$$2 = 3.$$

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಶ್ನಾತೀತ ಸಾಮ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಆರಂಭಿಸೋಣ :

$$4 - 10 = 9 - 15.$$

ಈ ಸಾಮ್ಯದ ಎರಡು ಬದಿಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಮೊತ್ತ $6\frac{1}{4}$ ಕೂಡಿಸೋಣ :

$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}.$$

ಈ ಪ್ರಹಸನ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳೊಂದಿಗೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ :

$$2^{2} - 2 \times 2 \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = 3^{2} - 2 \times 3 \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^{2},$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^{2} = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^{2}.$$

ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

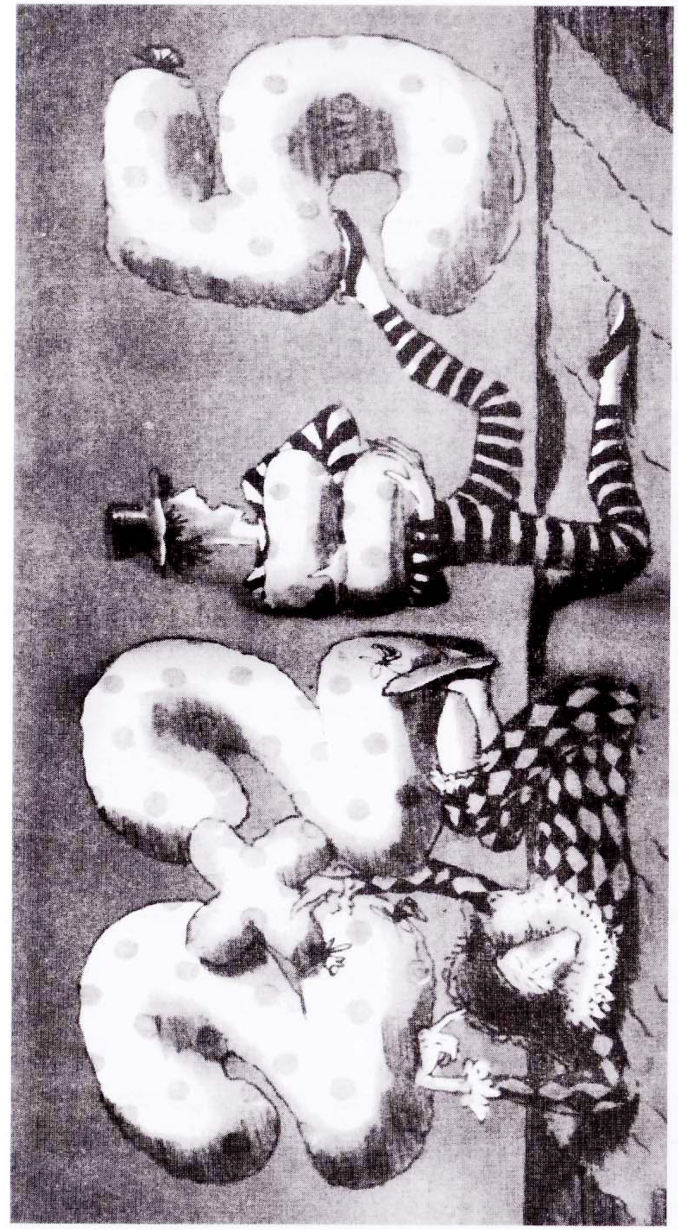
ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ $\frac{5}{2}$ ಕೂಡಿಸೋಣ. ಆಗ ಈ ತಮಾಷೆಯ ಫಲಿತಾಂಶ ದೊರಕುವುದು :

$$2 = 3.$$

ಇದರಲ್ಲಿ ತಪ್ಪು ಎಲ್ಲಾಗಿದೆ ?

ಉತ್ತರ :

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^{2} = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^{2}$$



ಚಿತ್ರ 24

ಈ ವರ್ಗ ಸಾಮ್ಯಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಕೆಳಗಿನ ವರ್ಗಮೂಲ ಸಾಮ್ಯ ಒದಗುತ್ತದೆಂದು ನಿರ್ಣಯಿಸಿದಾಗ ತಪ್ಪು ಮಾಡಿದ್ದೇವೆ.

$$2-\frac{5}{2} = 3-\frac{5}{2}.$$

ಏಕೆಂದರೆ ಎರಡು ವರ್ಗಗಳು ಸಮಾನ ಎಂಬುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳೂ ಸಮಾನ ಎಂದಾಗದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(-5)^2 = 5^2$ ಆದರೂ, -5 ಎಂಬುದು 5ಕ್ಕೆ ಸಮನಲ್ಲ. ಒಂದನೆಯ ಘಾತದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಿನ್ನ ಚಿಹ್ನೆ ಹೊಂದಿದ್ದರೂ ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬಹುದು. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲೂ ಇದೇ ರೀತಿ ಆಗಿದೆ :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

ಈ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೂ, $-1/2$ ಎಂಬುದು $1/2$ ಕ್ಕೆ ಸಮವಲ್ಲ.

ಸಮಸ್ಯೆ 2 :

ಇನ್ನೊಂದು ಬೀಜಗಣಿತ ವಿರೋಧಾಭಾಸ ಮುಂದಿದೆ :

$$2 \times 2 = 5.$$

ಇದೂ ಮುಂಚಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಂತೆಯೇ ಇದೆ; ಅದೇ ತಂತ್ರವನ್ನು ಆಧರಿಸಿದೆ. ಇದನ್ನೂ ಸಂದೇಹಾತೀತವಾದ ಒಂದು ಸಾಮ್ಯ ಸಮೀಕರಣ ಆರಂಭಿಸೋಣ.

$$16 - 36 = 25 - 45.$$

ಈಗ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ ಸಮಾನ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸೋಣ :

$$16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4}$$

ಅನಂತರ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ :

$$4^2 - 2\times 4\times\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2\times 5\times\frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2 = \left(5-\frac{9}{2}\right)^2.$$

ಈ ಹಿಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯ ತಪ್ಪು ತೀರ್ಮಾನವನ್ನು ಇದರಲ್ಲೂ ಬಳಸಿದಾಗ,

$$4-\frac{9}{2} = 5-\frac{9}{2},$$

$$4 = 5,$$

$$2\times 2 = 5.$$

ಗಣಿತ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ವಿವೇಚನೆಯಿಲ್ಲದೆ ಬಿಡಿಸತೊಡಗುವ ಅನನುಭವಿ ಗಣಿತಜ್ಞನಿಗೆ ಈ ಮೇಲಿನ ಕುತೂಹಲಕಾರಿ ನಿದರ್ಶನಗಳು ಎಚ್ಚರಿಕೆ ನೀಡುತ್ತವೆ.

■

ಅಧ್ಯಾಯ – ಆರು

ದ್ವಿಘಾತದ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಹಸ್ತಲಾಘವ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಒಂದು ಸಭೆಯಲ್ಲಿ 66 ಹಸ್ತಲಾಘವಗಳಾದವು ಎಂದೊಬ್ಬ ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿದರು. ಹಾಗಾದರೆ ಅಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜನರು ಸೇರಿದ್ದರು ?

ಉತ್ತರ :

ಬೀಜಗಣಿತದ ನೆರವಿನಿಂದ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ತೀರಾ ಸುಲಭವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಸಭೆಯಲ್ಲಿದ್ದ x ಜನರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನೂ $x-1$ ಜನರೊಡನೆ ಕೈ ಕುಲುಕಿದ್ದಾನೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಹಸ್ತಲಾಘವಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $x(x-1)$. ಆದರೆ, ಐವನೋವ್ ಎಂಬಾತ ಪೆತ್ರೊವ್‌ನ ಕೈ ಕುಲುಕಿದಾಗ ಪೆತ್ರೊವ್ ಕೂಡ ಐವನೊವ್‌ನೊಡನೆ ಕೈ ಕುಲುಕಿದ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಿ. ಹಾಗಾಗಿ, ಈ ಎರಡು ಹಸ್ತಲಾಘವಗಳನ್ನೂ ಒಂದೇ ಹಸ್ತ ಲಾಘವ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಒಟ್ಟು ಹಸ್ತಲಾಘವಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $x(x-1)$ನ ಅರ್ಧ.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66,$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದರೆ,

$$x^2 - x - 132 = 0,$$

ಅಂದರೆ,

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+528}}{2},$$

$$x_1 = 12,\ x_2 = -11.$$



ಚಿತ್ರ 25

ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ (–11 ಜನರು) ಅರ್ಥವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅದನ್ನು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸಿ, ಮೊದಲನೆಯ ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಸಮಾರಂಭದಲ್ಲಿ 12 ಜನರಿದ್ದರು.

ಜೇನು ಹುಳುಗಳ ದಂಡು

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕುತೂಹಲಕಾರಿ ಸ್ಪರ್ಧೆ ಜರಗುತ್ತಿತ್ತು. ಕ್ಲಿಷ್ಟ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಉತ್ತರ ಪತ್ತೆ ಮಾಡುವ ಬಹಿರಂಗ ಸ್ಪರ್ಧೆ. ಮಾನಸಿಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಇಂಥ ಸ್ಪರ್ಧೆಗಳ ಸ್ಪರ್ಧಾಳುಗಳಿಗೆ, ಹಿಂದೂ ಗಣಿತ ಕೈಪಿಡಿಗಳಿಂದ ಭಾಗಶಃ ಸಹಾಯ ಒದಗುತ್ತಿತ್ತು. ಅಂತಹ

ಕೈಪಿಡಿಯೊಂದರ ಲೇಖಕ ಹೀಗೆ ಬರೆದಿದ್ದಾನೆ. "ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಜಾಣನೊಬ್ಬ ಸಾವಿರಾರು ಇತರ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬಲ್ಲ. ತನ್ನ ಪ್ರಖರ ಬೆಳಕಿನಿಂದ ಸೂರ್ಯನು ನಕ್ಷತ್ರಗಳನ್ನೂ ಕಾಂತಿಹೀನವಾಗಿಸುವಂತೆ ಜಾಣನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮುಂದೊಡ್ಡಿ, ಅವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ತನ್ನ ಚಾತುರ್ಯ ಪ್ರದರ್ಶನದಿಂದ ನೆರೆದ ಸಭಿಕರೆದುರು ಇತರರ ಖ್ಯಾತಿಯನ್ನು ಮಸುಕುಮಾಡಬಲ್ಲ." ಈ ಉಕ್ತಿಯ ಮೂಲ ಕಾವ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ಯಾಕೆಂದರೆ, ಇಡೀ ಗ್ರಂಥವೇ ಪದ್ಯಗಳಿಂದ ತುಂಬಿದ್ದು, ಸಮಸ್ಯೆಗಳೂ ಪದ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿವೆ. ಅದರ ಆಯ್ದ ಪದ್ಯವೊಂದನ್ನು ಗದ್ಯಕ್ಕೆ ತರ್ಜುಮೆ ಮಾಡಿದ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದು ಮುಂದಿದೆ :

ಜೇನ್ನೊಣಗಳ ಒಂದು ದಂಡಿನಲ್ಲಿ $^{8}/_{4}$ ಜೇನ್ನೊಣಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದವುಗಳ ಗುಂಪು ಮಲ್ಲಿಗೆಯ ಪೊದೆಯಲ್ಲಿ ಇಳಿಯಿತು. ಈ ಗುಂಪಿನ ಜೇನ್ನೊಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ಆ ಓಡುದಂಡಿನ ಜೇನ್ನೊಣಗಳ ಅರ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗಮೂಲಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿತ್ತು. ಇದಲ್ಲದೆ, ತಾವರೆಯ ಕಂಪಿನಿಂದ ಆಕರ್ಷಿತವಾಗಿ ಅದರೊಳಗೆ ಬಂಧಿಯಾಗಿದ್ದ ಒಂದು ಜೇನ್ನೊಣದ ಝೇಂಕಾರವನ್ನು ಕೇಳಿ ಸಣ್ಣ ಜೇನ್ನೊಣವೊಂದು ಆ ಹೂವಿನ ಸುತ್ತ ಸುತ್ತುತ್ತಿತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ ಓಡು ದಂಡಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಜೇನ್ನೊಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ :

ಓಡು ದಂಡಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಜೇನ್ನೊಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು :

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x.$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಲು ಈ ಅವ್ಯಕ್ತಪದ ಬಳಸೋಣ :

$$y = \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

ಈಗ $x = 2y^2$ ಎಂದಾಗಿ, ನಮಗೆ ಲಭಿಸುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$y = \frac{16y^2}{9} + 2 = 2y^2 \text{ ಅಥವಾ } 2y^2 - 9y - 18 = 0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ y ಯ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳು ಸಿಗುತ್ತವೆ.

$$y_1 = 6, \quad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

ಇದಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ x ನ ಬೆಲೆಗಳು :

$$x_1 = 72, \; x_2 = 4.5.$$

ಜೇನ್ನೊಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, x ನ ಮೊದಲ ಬೆಲೆಯೇ, ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ. ಈ ಪ್ರಕಾರ ಓಡು ದಂಡಿನಲ್ಲಿದ್ದ ಜೇನ್ನೊಣಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 72. ಇದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡೋಣ.

$$\sqrt{\frac{72}{2}} + \frac{8}{9} \times 72 + 2 = 6 + 64 + 2 = 72.$$

ಕೋತಿಗಳ ಗುಂಪು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ವಿ. ಐ. ಲೆಬದೆವ್ ಬರೆದ *'ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಶೋಧಿಸಿದವರು ಯಾರು ?'* ಎಂಬ ಬೆರಗುಗೊಳಿಸುವ ಕಿರು ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಭಾರತ ದೇಶದ ಇನ್ನೊಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪದ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರ ಕನ್ನಡ ರೂಪಾಂತರ ಮುಂದಿದೆ :

ಕೋತಿಗಳ ಗುಂಪುಗಳೆರಡು ಆಟವಾಡುತಿವೆ
ಎಂಟರಲ್ಲೊಂದು ಭಾಗದ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕೋತಿಗಳು ಬನದಲ್ಲಿ ಗಲಾಟೆ ಮಾಡುತಿವೆ
ಉಳಿದ ಹನ್ನೆರಡು ಹಿಗ್ಗಿನಿಂದ ಬೊಬ್ಬಿರಿಯುತಿವೆ !
ಬನದಲ್ಲಿದ್ದ ಕೋತಿಗಳೆಷ್ಟು ಹೇಳುವಿರಾ ?

ಉತ್ತರ :

ಬನದಲ್ಲಿದ್ದ ಕೋತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ,

$$x_1 = 48, \quad x_2 = 16.$$

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಎರಡು ಉತ್ತರಗಳಿವೆ : ಅಲ್ಲಿದ್ದ ಕೋತಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 48 ಅಥವಾ 16. ಇವೆರಡೂ ಉತ್ತರಗಳು ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಸರಿ ಹೊಂದುತ್ತವೆ.

ದೂರದೃಷ್ಟಿಯ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಈವರೆಗೆ ಪರಿಶೀಲಿಸಿದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಆಯಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ ಪ್ರತಿ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದೆವು. ಮೊದಲ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಋಣ ಮೂಲವನ್ನು ಕೈ ಬಿಟ್ಟೆವು, ಯಾಕೆಂದರೆ, ಅದು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅರ್ಥಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿತ್ತು. ಎರಡನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯುಳ್ಳ ಮತ್ತು ಋಣಬೆಲೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ತಿರಸ್ಕರಿಸಿದೆವು. ಮೂರನೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಮೇಲಿನವಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ ಎರಡು ಮೂಲಗಳನ್ನೂ ಬಳಸಿದೆವು. ಎರಡನೆಯ ಉತ್ತರದ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳು, ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವವರನ್ನು ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೆ, ಅದನ್ನು ರೂಪಿಸಿದವರನ್ನೂ ಒಮ್ಮೊಮ್ಮೆ ಆಶ್ಚರ್ಯಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಮುಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಮಂಡಿಸಿದವನಿಗಿಂತ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವೇ ಹೆಚ್ಚು ದೂರದೃಷ್ಟಿತ್ವ ತೋರ್ಪಡಿಸಿತು.

ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 25 ಮೀಟರ್ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಎಸೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅದು ನೆಲದಿಂದ 20 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರ ತಲುಪಲು ಎಷ್ಟು ಸಮಯ ತಗಲುತ್ತದೆ ?

ಉತ್ತರ :

ವಾಯು ಪ್ರತಿರೋಧವಿಲ್ಲದಾಗ, ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಮೇಲೆಸೆದರೆ, ಅದು ನೆಲದಿಂದ ಏರುವ ಎತ್ತರ (h), ಅದರ ಪ್ರಾರಂಭ ವೇಗ (v), ಗುರುತ್ವ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ (g) ಹಾಗೂ ಅವಧಿ (t) – ಇವುಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಚಲನ ವಿಜ್ಞಾನವು ಖಚಿತಪಡಿಸಿದೆ :

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

ವಾಯುವಿನ ಪ್ರತಿರೋಧವು ಕಡಿಮೆ ವೇಗದ ಚಲನೆಯಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಲ್ಪವಾದ್ದರಿಂದ, ಅದನ್ನಿಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನು ಸರಳಗೊಳಿಸಲಿಕ್ಕಾಗಿ g ಯು 10 ಮೀಟರ್/ಸೆಕೆಂಡ್/ ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. (ನಿಖರವಾದ 9.8 ಮೀಟರುಗಳ ಬದಲಾಗಿ 10 ಮೀ. ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಾಗುವ ತಪ್ಪು ಕೇವಲ ಶೇ. 2). ಈಗ ಉಲ್ಲೇಖಿತ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ h, v ಮತ್ತು g ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ.

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2}$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರಗಳು :

$t_1 = 1$ ಹಾಗೂ $t_2 = 4$.

ಚೆಂಡು 20 ಮೀಟರುಗಳ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾರಿ ಇರುವುದು. ಚೆಂಡನ್ನು ಎಸೆದ ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನ ಬಳಿಕ ಹಾಗೂ 4 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಬಳಿಕ.

ಇದು ಅಸಂಭವವೆಂದು ತಟ್ಟನೆ ಅನಿಸುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಇದನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಪರಿಶೀಲಿಸದೆ, ಎರಡನೆಯ ಉತ್ತರವನ್ನೂ ತಿರಸ್ಕರಿಸಿ ಬಿಡುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ಹಾಗೆ ಮಾಡುವುದು ತಪ್ಪು ! ಎರಡನೆಯ ಉತ್ತರವೂ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ. ಯಾಕೆಂದರೆ ಚೆಂಡು 20 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ತಲಪುವುದು: ಒಮ್ಮೆ ಮೇಲೇರುವಾಗ, ಇನ್ನೊಮ್ಮೆ ಕೆಳಗೆ ಬೀಳುವಾಗ, ಇದನ್ನು ಈ ಪ್ರಕಾರ ಸುಲಭವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು: ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 25 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಪ್ರಾರಂಭ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಎಸೆದ ಚೆಂಡು ಮೇಲೇರುತ್ತಾ 2.5 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ 31.25 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಎತ್ತರ ತಲಪುವುದು. ಹೀಗೆ ಮೇಲೇರುವಾಗ 1 ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ 20 ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಎತ್ತರ ತಲುಪುವುದು. ಅನಂತರ 1.5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳಷ್ಟು ಕಾಲ ಇನ್ನೂ ಮೇಲೇರುವುದು. ಅಲ್ಲಿಂದ ಮುಂಚಿನಷ್ಟೇ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ಬೀಳುತ್ತಾ 20 ಮೀಟರುಗಳ ಎತ್ತರವನ್ನು ಪುನಃ ತಲುಪುವುದು; ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನ ಬಳಿಕ ನೆಲಕ್ಕೆ ಬೀಳುವುದು.

ಆಯ್ಲರನ ಸಮಸ್ಯೆ

ಸ್ಟೆಂಧಾಲ್ ತನ್ನ ಆತ್ಮಕಥೆಯಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಶಾಲಾ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದಾನೆ :

"ಗಣಿತದ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರ ಬಳಿ ಆಯ್ಲರ್ ಬರೆದ ಪುಸ್ತಕವಿತ್ತು. ರೈತ ಮಹಿಳೆಯೊಬ್ಬಳು ಮಾರುಕಟ್ಟೆಗೆ ಒಯ್ದ ಮೊಟ್ಟೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಆ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ನಾನು ಕಂಡೆ.... ಅದು ನನ್ನ ಕಣ್ಣನ್ನು ತೆರೆಸಿತು. ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಸಮಸ್ಯಾ ಪರಿಹಾರ ಸಾಧನವನ್ನಾಗಿ ಬಳಸುವುದರ ಅವಶ್ಯಕತೆಯನ್ನು ನಾನು ಮನಗಂಡೆ. ಎಂಥ ದುರಂತ ! ಅಂದಿನವರೆಗೆ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ನನಗೆ ಯಾರೂ ತಿಳಿಸಿರಲಿಲ್ಲ..."

ಯುವಕ ಸ್ಟೆಂಧಾಲ್‌ನ ಮೇಲೆ ಅಗಾಧ ಪ್ರಭಾವ ಬೀರಿದ ಆ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು *ಬೀಜಗಣಿತ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ* ಎಂಬ ತನ್ನ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಆಯ್ಲರ್ ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದಾನೆ :

ರೈತ ಮಹಿಳೆಯರಿಬ್ಬರು 100 ಮೊಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ಮಾರುಕಟ್ಟೆಗೆ ಒಯ್ದರು. ಒಬ್ಬಳು ಒಯ್ದ ಮೊಟ್ಟೆಗಳು ಇನ್ನೊಬ್ಬಳು ಒಯ್ದದಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ. ಇಬ್ಬರೂ ತಮ್ಮಲ್ಲಿದ್ದ ಮೊಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ಮಾರಿ ಸಮಾನ ಮೊತ್ತದ ಹಣ ಗಳಿಸಿದರು. ಮೊದಲನೆಯವಳು ಎರಡನೆಯವಳೊಡನೆ, "ನೀನು ಒಯ್ದಷ್ಟು ಮೊಟ್ಟೆಗಳು ನನ್ನ ಬಳಿ ಇದ್ದಿದ್ದರೆ ನಾನು 15 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಗಳಿಸುತ್ತಿದ್ದೆ" ಎಂದಳು. ಆಗ ಎರಡನೆಯವಳು ಉತ್ತರಿಸಿದಳು : "ನೀನು ಒಯ್ದಷ್ಟು ಮೊಟ್ಟೆಗಳು ನನ್ನ ಬಳಿ ಇದ್ದಿದ್ದರೆ ನಾನು $6\,^2/_3$ ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಗಳಿಸುತ್ತಿದ್ದೆ." ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಮೊಟ್ಟೆಗಳೆಷ್ಟು?

ಉತ್ತರ :

ಮೊದಲಿನವಳು ಒಯ್ದ ಮೊಟ್ಟೆಗಳು x ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯವಳು ಒಯ್ದ ಮೊಟ್ಟೆಗಳು $100 - x$ ಎಂದಿರಲಿ. ಮೊದಲನೆಯವಳ ಬಳಿ $100 - x$ ಮೊಟ್ಟೆಗಳಿದ್ದಿದ್ದರೆ ಅವಳು 15 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಗಳಿಸುತ್ತಿದ್ದಳು. ಈ ಪ್ರಕಾರ ಅವಳು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದ ದರ,

$$\frac{15}{100-x}$$

ಇದರಂತೆ ಎರಡನೆಯವಳು ಮಾರಾಟ ಮಾಡಿದ ದರ,

$$6\frac{2}{3} \div x = \frac{20}{3x}$$

ಈಗ ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಗಳಿಸಿದರೆಂದು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬಹುದು :

ಮೊದಲಿನವಳು : $x \times \frac{15}{100-x} = \frac{15x}{100-x}$,

ಎರಡನೆಯವಳು : $(100-x) \times \frac{20}{3x} = \frac{20(100-x)}{3x}$.

ಇಬ್ಬರೂ ಸಮಾನ ಮೊತ್ತದ ಹಣ ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ ; ಆದ್ದರಿಂದ

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{20(100-x)}{3x}.$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$x^2 + 160x - 8000 = 0$$

ಇದರಿಂದ ಒದಗುವ x ನ ಬೆಲೆಗಳು :

$$x_1 = 40, \quad x_2 = -200.$$

ಇಲ್ಲಿ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲದ್ದರಿಂದ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಉತ್ತರ ಸಾಧ್ಯ : ಮೊದಲಿನವಳು 40 ಮೊಟ್ಟೆಗಳನ್ನೂ, ಎರಡನೆಯವಳು 60 ಮೊಟ್ಟೆಗಳನ್ನೂ ಒಯ್ದಿದ್ದಳು.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಶೀಘ್ರವಾಗಿ ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನವೊಂದಿದೆ. ಆದರೆ, ಇದಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿನ ವಿಶ್ಲೇಷಣಾ ಶಕ್ತಿ ಬೇಕು ಹಾಗೂ ಈ ವಿಧಾನ ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೊಳೆಯುವುದಿಲ್ಲ.

ಎರಡನೆಯವಳ ಬಳಿ ಮೊದಲನೆಯವಳ ಬಳಿ ಇದ್ದುದಕ್ಕಿಂತ k ಪಟ್ಟು ಜಾಸ್ತಿ ಮೊಟ್ಟೆಗಳಿದ್ದವು ಎಂದಿರಲಿ. ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಸಮಾನ ಮೊತ್ತದ ಹಣವನ್ನು ಗಳಿಸಿದ ಕಾರಣ ಮೊದಲಿನವಳು ಎರಡನೆಯವಳಿಗಿಂತ k ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿನ ದರದಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಮೊಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ಮಾರಿದಳು ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಅವರಿಬ್ಬರೂ ತಮ್ಮ ಸರಕನ್ನು ಮಾರಾಟದ ಮೊದಲೇ ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿಕೊಂಡಿದ್ದರೆ, ಮೊದಲನೆಯವಳು ಎರಡನೆಯವಳಿಗಿಂತ k ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿನ ಮೊಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, k ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿನ ದರದಲ್ಲಿ ಮಾರಾಟ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಳು. ಅಂದರೆ, ಎರಡನೆಯವಳಿಗಿಂತ k^2 ಹೆಚ್ಚಿನ ಹಣವನ್ನು ಮೊದಲನೆಯವಳು ಗಳಿಸುತ್ತಿದ್ದಳು. ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು :

$$k^2 = 15 \div 6\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$K = \frac{3}{2}.$$

ಈಗ 100ನ್ನು 2 : 3 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ ತಟ್ಟನೆ ಉತ್ತರ ಒದಗುತ್ತದೆ : ಮೊದಲನೆಯವಳ ಬಳಿ 40 ಮೊಟ್ಟೆಗಳು ಹಾಗೂ ಎರಡನೆಯವಳ ಬಳಿ 60 ಮೊಟ್ಟೆಗಳು ಇದ್ದವು.

ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಒಂದು ರಸ್ತೆಯ ಚೌಕದಲ್ಲಿ ಹದಿಮೂರು ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳನ್ನು ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 4, ಇನ್ನೊಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 9 ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳಿವೆ. ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 50 ಮೀಟರ್‌ಗಳು. ಈಗ ಉತ್ತರಿಸಬೇಕಾದ ಪ್ರಶ್ನೆ : ಒಬ್ಬನು ಎಲ್ಲಿ ನಿಂತುಕೊಂಡರೆ ಎರಡೂ ಗುಂಪುಗಳಿಂದ ಕೇಳಿ ಬರುವ ಶಬ್ದದ ಘೋಷ ತೀವ್ರತೆಯು ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ?

ಉತ್ತರ :

ಶಬ್ದ ತ್ರೀವ್ರತೆಯು ಸಮಾನವಾಗಿರುವ ಜಾಗಕ್ಕೆ 4 ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳಿರುವ ಜಾಗದಿಂದ ಇರುವ ಅಂತರ x ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಆ ಜಾಗದಿಂದ 9 ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳಿರುವ ಜಾಗಕ್ಕೆ ಇರುವ ಅಂತರ $50 - x$ ಆಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 26). ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆಯು ಅದು ಚಲಿಸುವ ದೂರದ (ಚಿತ್ರ 26) ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದೆಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. ಇದನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣ ರಚಿಸಬಹುದು :

$$\frac{4}{9} = \frac{x^2}{(50-x)^2}$$

ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$x^2 + 80x - 2000 = 0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ :

$$x_1 = 20,$$

$$x_2 = -100.$$

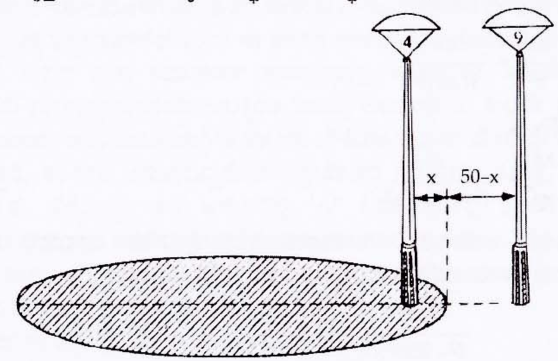
ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಧನ ಚಿಹ್ನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ ಎಂಬುದು ತಟ್ಟನೆ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ : ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆಯು ಸಮಾನವಾಗಿ ಕೇಳಬೇಕಾದರೆ ನಾಲ್ಕು ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳ ಗುಂಪಿನಿಂದ 20 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ, ಅಂದರೆ ಒಂಬತ್ತು ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳ ಗುಂಪಿನಿಂದ 30 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಬೇಕು.

ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇಲ್ಲಿ ಏನನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ? ಅದಕ್ಕೆ ಏನಾದರೂ ಅರ್ಥವಿದೆಯೇ ?

ಹೌದು, ಅದಕ್ಕೂ ಅರ್ಥವಿದೆ. ಶಬ್ದವು ಸಮಾನ ಜೋರಿನಲ್ಲಿ ಕೇಳಿಸುವ ಎರಡನೆಯ ಜಾಗವು, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿದಾಗ ಕಲ್ಪಿಸಿದ ಜಾಗವನ್ನು ನಾವು ಯಾವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಿಕೊಂಡೆವೋ ಅದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಇರುವುದೆಂದು ಈ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ನಾಲ್ಕು ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳ ಗುಂಪಿನಿಂದ ಆ ದಿಕ್ಕಿನ ಕಡೆಗೆ (9 ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳ ಗುಂಪಿನ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಲ್ಲ) 100 ಮೀಟರ್ ಸಾಗಿದರೆ ಸಿಗುವ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಎರಡೂ ಗುಂಪಿನ ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳಿಂದ ಕೇಳಿ ಬರುವ ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಜಾಗವು ಒಂಬತ್ತು ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳ ಗುಂಪಿನಿಂದ 100 ಮೀ + 50 ಮೀ = 150 ಮೀಟರುಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆಯು ಸಮಾನವಾಗಿ ಕೇಳುವ ಎರಡು ಬಿಂದು ಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ್ದೇವೆ. (ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹಲವಾರು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಇವೆರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ್ದೇವೆ.) ಈ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಇದೇ ಲಕ್ಷಣವುಳ್ಳ ಇನ್ಯಾವುದೇ ಬಿಂದು ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಆ ರೇಖೆಯ ಅಕ್ಕಪಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಇರಬಹುದು. ಈ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ವ್ಯಾಸವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳೂ ಇದೇ ಲಕ್ಷಣ ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಬಹುದು. ಈ ವೃತ್ತವು ಸಾಕಷ್ಟು ವಿಶಾಲ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ (ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಗೆರೆಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಭಾಗ). ಈ ವೃತ್ತದೊಳಗಿನ ಯಾವುದೇ ಜಾಗದಲ್ಲೂ ನಾಲ್ಕು ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳ ಗುಂಪಿನ ಶಬ್ದವು ಒಂಬತ್ತು ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳ ಗುಂಪಿನ ಶಬ್ದಕ್ಕಿಂತ ಜೋರಾಗಿ ಕೇಳಿಸಿದರೆ, ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾದ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಇರುವುದು.



ಚಿತ್ರ 26

ಚಂದ್ರಯಾನದ ಬೀಜಗಣಿತ

ಈ ಹಿಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳ ಎರಡು ಗುಂಪುಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಶಬ್ದವು ಸಮ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಕೇಳಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆ ಮಾಡಿದೆವು. ಅದೇ ರೀತಿ ಎರಡು ಖಗೋಳ ಕಾಯಗಳ ನಡುವೆ ಚಲಿಸುವ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯ ಮೇಲಿನ ಆಕರ್ಷಣೆಯು ಯಾವ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರ – ಇವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಇಂಥ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ನ್ಯೂಟನ್‌ನ ನಿಯಮದಂತೆ ಎರಡು ಕಾಯಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣೆಯ ಬಲವು ಅವುಗಳ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಗಳ ಗುಣಕಕ್ಕೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲೂ, ಅವುಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರದ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ವಿಲೋಮ ಅನುಪಾತದಲ್ಲೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಭೂಮಿಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ M ಹಾಗೂ ಭೂಮಿಯಿಂದ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಗೆ ಇರುವ ಅಂತರ x ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯ ಪ್ರತಿ ಗ್ರಾಂನ ಮೇಲೆ ಭೂಮಿಯು ಬೀರುವ ಆಕರ್ಷಣ ಬಲ :

$$\frac{Mk}{x^2}$$

ಇಲ್ಲಿ k ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುವ, ಒಂದೊಂದು ಗ್ರಾಂ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ಪರಸ್ಪರ ಆಕರ್ಷಣ ಬಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಚಂದ್ರನು, ಆ ವ್ಯೋಮ ನೌಕೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗ್ರಾಂನ ಮೇಲೆ ಅದೇ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಬೀರುವ ಆಕರ್ಷಣಾ ಬಲ :

$$\frac{mk}{(l-x)^2}$$

ಇಲ್ಲಿ m ಎಂಬುದು ಚಂದ್ರನ ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ ಹಾಗೂ l ಎಂಬುದು ಭೂಮಿಯಿಂದ ಚಂದ್ರನಿಗಿರುವ ಅಂತರ. (ಭೂಮಿ ಹಾಗೂ ಚಂದ್ರನ ನಡುವೆ, ಇವೆರಡರ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಈ ವ್ಯೋಮನೌಕೆ ಇದೆ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಲಾಗಿದೆ).

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$\frac{Mk}{x^2} = \frac{mk}{(l-x)^2}$$

ಅಥವಾ,

$$\frac{M}{m} = \frac{x^2}{l^2-2lx+x^2}.$$

$\frac{M}{m}$ ಎಂಬ ಅನುಪಾತವು ಸುಮಾರಾಗಿ 81.5 ಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬುದು ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನದಿಂದ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದಾಗ,

$$\frac{x^2}{l^2-2lx+x^2} = 81.5,$$

ಇದರಿಂದ,

$$80.5x^2-163.0lx+81.5l^2=0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ x ನ ಬೆಲೆಗಳು :

$$x_1=0.9l, x_2=1.12l.$$

ಧ್ವನಿವರ್ಧಕಗಳ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೇ, ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲೂ, ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರನ ಕೇಂದ್ರಗಳ ಜೋಡಣಾ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರಗಳಾಗಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ; ಈ ಎರಡೂ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯನ್ನು ಎರಡು ಖಗೋಳಕಾಯಗಳು ಸಮಾನ ಬಲದಿಂದ ಆಕರ್ಷಿಸುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಬಿಂದುವು ಭೂಮಿಯಿಂದ ಚಂದ್ರನಿಗಿರುವ ಅಂತರದ 0.9 ಭಾಗ ದೂರದಲ್ಲೂ (ಭೂಮಿಯಿಂದ ಅಳೆದಾಗ) ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು ಇದೇ ಅಂತರದ 1.12 ಭಾಗ ದೂರದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಭೂಮಿಯಿಂದ ಚಂದ್ರನ ಅಂತರ l ಸುಮಾರು 384 000 ಕಿಲೋಮೀಟರುಗಳು; ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಗುರುತಿಸಿದ ಒಂದು ಬಿಂದು ಭೂ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 346 000 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲೂ, ಇನ್ನೊಂದು 430 000 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ನಾವೀಗ ಗುರುತಿಸಿದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ (ಈ 2 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸದ ತುದಿ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ) ಇದೇ (ಚಿತ್ರ 27) ಗುಣವಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. (ಹಿಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆ ನೋಡಿ) ಭೂಮಿ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರನ ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅಕ್ಷವಾಗಿರಿಸಿಕೊಂಡು, ಅದರ ಸುತ್ತ ಈ ವೃತ್ತವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಈ ವೃತ್ತವು ಒಂದು ಗೋಳಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಮೇಲ್ಮೈಯ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳೂ ನಮ್ಮ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರಗಳಾಗಬಲ್ಲವು.

ಚಾಂದ್ರ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣೆಯ ಗೋಲ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುವ ಈ ಗೋಲಾಕೃತಿ (ಚಿತ್ರ 27) ಯ ವ್ಯಾಸ :

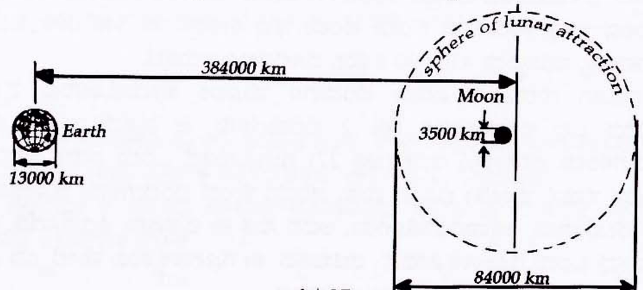
$$1.12l-0.9l = 0.22l \approx 84\,000 \text{ ಕಿ. ಮೀ.}$$

ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯೊಂದು ಚಂದ್ರನಲ್ಲಿಗೆ ತಲುಪಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಈ ಚಾಂದ್ರ ಆಕರ್ಷಣೆಯ ಗೋಲದೊಳಗೆ ತಲುಪಿದರೆ ಸಾಕೆಂಬ ಜನಜನಿತವಾದ ತಪ್ಪು ಕಲ್ಪನೆಯೊಂದಿದೆ. ಮೇಲ್ನೋಟಕ್ಕೆ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯೊಂದು ಈ ಚಾಂದ್ರ ಆಕರ್ಷಣೆಯ ಗೋಲದೊಳಕ್ಕೆ ಬಂದರೆ (ಜೊತೆಗೆ, ಅದರ ವೇಗ ಗಮನಾರ್ಹ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ), ಈ ವಲಯದಲ್ಲಿ ಭೂಮಿಯ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣೆಯ ಬಲಕ್ಕಿಂತ ಚಾಂದ್ರ ಆಕರ್ಷಣೆಯ ಬಲವೇ ಅಧಿಕವಾಗಿ ಇರುವುದರಿಂದ, ಅನಿವಾರ್ಯವಾಗಿ ಆ ವ್ಯೋಮ ನೌಕೆಯು ಚಂದ್ರನ ಮೇಲೆ ಬೀಳಬೇಕೆಂದು ತೋರುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿ ಆಗುವುದಿದ್ದರೆ, ಚಾಂದ್ರಯಾನದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಬಹಳ ಸರಳವಾಗಿ ಬಿಡುತ್ತಿದ್ದವು. ಏಕೆಂದರೆ, ಆಗ ಆಕಾಶದಲ್ಲಿ $^1/_2°$ ಓರೆಕೋನದಲ್ಲಿ ಕಾಣಿಸುವ ವ್ಯಾಸ ಹೊಂದಿರುವ ಚಂದ್ರನ ಕಡೆಗೆ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯನ್ನು ಗುರಿಯಿಡುವ ಬದಲು, 84 000 ಕಿ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸದ ಹಾಗೂ 12° ಯಷ್ಟು ಕೋನೀಯ ವ್ಯಾಪ್ತಿ ಹೊಂದಿರುವ ಈ ಚಾಂದ್ರ ಆಕರ್ಷಣೆಯ ಗೋಲದ ಕಡೆಗೆ ಗುರಿ ಇಟ್ಟಿದ್ದರೆ ಸಾಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು.

ಆದರೆ ಈ ತರ್ಕವು ತಪ್ಪು ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದು ಸುಲಭ.

ಭೂಮಿಯಿಂದ ಉಡಾವಣೆಗೊಂಡ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯೊಂದು ಭೂಮಿಯ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣೆಯ ಬಲದಿಂದಾಗಿ ಒಂದೇ ಸಮನೆ ತನ್ನ ವೇಗ ಕಳೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾ ಸಾಗಿ, ಚಾಂದ್ರ ಆಕರ್ಷಣೆಯ ಗೋಲವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವ ವೇಳೆಗೆ ಶೂನ್ಯ ವೇಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಆಗ ಅದು ಚಂದ್ರನ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವುದೇ ? ಖಂಡಿತ ಬೀಳುವುದಿಲ್ಲ !

ಮೊದಲನೆಯ ವಿವರಣೆ : ಚಾಂದ್ರ ಆಕರ್ಷಣೆಯ ಗೋಲದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲೂ ಭೂಮಿಯ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣೆಯ ಬಲದ ಪ್ರಭಾವ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಭೂ–ಚಾಂದ್ರ ರೇಖೆಯ ಹೊರತಾಗಿ, ಉಳಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚಾಂದ್ರ ಆಕರ್ಷಣೆಯು ಭೂಮಿಯ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣೆಯ ಬಲವನ್ನು ಮೀರಿಸುತ್ತದೆ. ಅದಲ್ಲದೆ, ಆ ಬಲದೊಂದಿಗೆ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಬಲಗಳ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ, ಚಂದ್ರನ ಬಲವು ಸೇರಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಫಲಿತ ಬಲದ ದಿಕ್ಕು ಚಂದ್ರನ ಕಡೆಗೆ ಇರುವುದೇ ಇಲ್ಲ. (ಭೂ – ಚಂದ್ರ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಈ ಫಲಿತ ಬಲದ ದಿಕ್ಕು ಚಂದ್ರನ ಕೇಂದ್ರದ ಕಡೆಗೆ ಇರುತ್ತದೆ).



ಚಿತ್ರ 27

ಎರಡನೆಯ ವಿವರಣೆ : ಚಂದ್ರ ಕೂಡ ನಿಶ್ಚಲ ಆಕಾಶಕಾಯವಲ್ಲ ಎಂಬುದೇ ಅತಿ ಮುಖ್ಯ ವಿಷಯ. ಚಂದ್ರನ ಚಲನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯೊಂದು ಹೇಗೆ ಸಾಗುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕಾದರೆ, (ಅಂದರೆ ಆ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯು ಚಂದ್ರನ ಮೇಲ್ಮೈಯನ್ನು ತಲುಪುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು) ಚಂದ್ರನ ಚಲನ ವೇಗಕ್ಕೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ ಆ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯ ವೇಗವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಈ ವೇಗವು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ ಚಂದ್ರನೇ ಭೂಮಿಯ ಸುತ್ತ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 1 ಕಿ.ಮೀ. ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಾನೆ. ಈ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ ಚಂದ್ರನಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯ ವೇಗವು ಎಷ್ಟು ಅಧಿಕವಾಗಿರುತ್ತದೆಂದರೆ, ಆ ವ್ಯೋಮ ನೌಕೆಯನ್ನು ತನ್ನ ಕಡೆಗೆ ಸೆಳೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಇಲ್ಲವೇ ಕೊನೆಯ ಪಕ್ಷ ಕೃತಕ ಉಪಗ್ರಹದಂತೆ ತನ್ನ ಆಕರ್ಷಣಾ ಗೋಲದೊಳಗೆ ಕಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಚಂದ್ರನಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯು ಚಾಂದ್ರ ಆಕರ್ಷಣೆಯ ಗೋಲದ ಬಳಿಗೆ ಬರುವ ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯದ ಮುನ್ನವೇ ಚಾಂದ್ರ ಆಕರ್ಷಣಾ ಬಲವು ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯ ಚಲನೆಯ ಮೇಲೆ ಗಮನಾರ್ಹ ಪರಿಣಾಮ ಬೀರಲು ತೊಡಗುತ್ತದೆ. ಖಗೋಳ ಉಡಾವಣಾ ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ, *ಚಂದ್ರನ ಗುರುತ್ವ ಪ್ರಭಾವ ಗೋಳ* (66 000 ಕಿ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯ) ಎಂದು ಕರೆಯುವ ವಲಯದೊಳಗೆ ವ್ಯೋಮನೌಕೆ ಪ್ರವೇಶಿಸಿದೊಡನೆ ಚಂದ್ರನ ಆಕರ್ಷಣಾ ಬಲವನ್ನು

ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದು ನಿಯಮ. ಆಗ ಭೂಮಿಯ ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷಣಾ ಬಲವನ್ನು ನಿರ್ಲಕ್ಷಿಸಿ, ಚಂದ್ರನಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ನೌಕೆಯ ಚಲನೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಚಂದ್ರ ಗುರುತ್ವ ಪ್ರಭಾವಲಯವನ್ನು ನೌಕೆಯು ಪ್ರವೇಶಿಸುವ ವೇಗವನ್ನು (ಚಂದ್ರನಿಗೆ ಸಾಪೇಕ್ಷವಾಗಿ) ಎಚ್ಚರದಿಂದ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯನ್ನು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಚಲನ ಪಥದಲ್ಲಿ ಚಂದ್ರನತ್ತ ಕಳಿಸಬೇಕು; ಈ ವ್ಯೋಮ ನೌಕೆಯು ಚಾಂದ್ರ ಗುರುತ್ವ ಗೋಲವನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸುವ ವೇಗವು (ಚಂದ್ರನಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿ) ಚಂದ್ರನ ದಿಕ್ಕಿಗಿರುವುದನ್ನು ಈ ಚಲನಪಥವು ಖಚಿತಪಡಿಸಬೇಕು. ಹೀಗಾಗಬೇಕಾದರೆ ವ್ಯೋಮನೌಕೆಯು ತನ್ನ ಚಲನಪಥದಲ್ಲಿ ಸಾಗುತ್ತಿರುವಾಗಲೇ, ಚಾಂದ್ರ ಕ್ರಿಯಾಗೋಲವನ್ನು ಸಂಧಿಸಿ, ಅದನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕಾರ, 84 000 ಕಿ. ಮೀ. ವ್ಯಾಸದ ಗೋಲವನ್ನು ಪ್ರವೇಶಿಸಲಿಕ್ಕಾಗಿ ನಿಖರವಾಗಿ ಗುರಿಯಿಡುವುದು ಬಹಳ ಕಷ್ಟದ ಕೆಲಸ. ಚಂದ್ರನ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿ ಇಳಿಯಲು ಬೇಕಾದ ವಿನ್ಯಾಸವಂತೂ ಇನ್ನೂ ಕಷ್ಟದ ಕೆಲಸ.

ಒಂದು ಕ್ಲಿಷ್ಟ ಸಮಸ್ಯೆ

ಎನ್. ಬೊಗ್ದೊನೊವ್–ಬೆಲ್‌ಸ್ಕಿ ಎಂಬಾತ *A Hard Problem** ಎಂಬ ಚಿತ್ರವನ್ನು 1895ರಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ. (ಚಿತ್ರ 28 ನೋಡಿ). ಅದರಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿದ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಗಮನಿಸತಕ್ಕದ್ದಾಗಿದೆ; ಆದರೂ, ಆ ಚಿತ್ರ ನೋಡುವ ಹಲವರು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸದಿರುವ ಸಂಭವವೇ ಜಾಸ್ತಿ. ಒಮ್ಮೆ ನೋಡಿದೊಡನೆ ಮಾನಸಿಕವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂದು ತೋರುವ ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ಚಿತ್ರದ ಹಿನ್ನೆಲೆಯಾಗಿದೆ :

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಸುಲಭವಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಲ್ಲವರಾಗಿದ್ದರು. ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಇರುವುದು ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ವಿಜ್ಞಾನದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿದ್ದ ಎಸ್. ಎ. ರಚಿನ್‌ಸ್ಕಿ ಅವರ ಯಥಾವತ್ ಭಾವಚಿತ್ರ. ಅವರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಹುದ್ದೆ ತೊರೆದು ಹಳ್ಳಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಶಾಲಾ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರಾದರು. ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಅದ್ಭುತವಾಗಿ ಬಳಸಿ ಮಾನಸಿಕವಾಗಿಯೇ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಈ ಪ್ರತಿಭಾವಂತ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ತಮ್ಮ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ರೂಢಿಸುತ್ತಿದ್ದರು. 10, 11, 12, 13, ಮತ್ತು 14 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕುತೂಹಲದಾಯಕ ವಿಶೇಷ ಸಂಬಂಧವಿದೆ ಅದು,

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$ (ಚಿತ್ರ 28).

100 + 121 + 144 = 365, ಹಾಗಾಗಿ, ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲೇ ಬಿಡಿಸಿ ಅದರ ಉತ್ತರ 2 ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದು ಸುಲಭ.

ಈ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ವಿಶಿಷ್ಟಗುಣದ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಶಾಲ ತಳಹದಿಯಲ್ಲಿ ಮಂಡಿಸಲು ಬೀಜಗಣಿತ ಸಹಕರಿಸುತ್ತದೆ : ಐದು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ

* ಇದರಲ್ಲಿ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಕರಿಹಲಗೆಯ ಮೇಲೆ ಮೇಸ್ಟರು ಹಾಕಿದ್ದ ಲೆಕ್ಕ ನೋಡಿ ಗಾಬರಿಯಾಗಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಚಿತ್ರಣವಿದೆ. – *ಸಂಪಾದಕರು*



ಚಿತ್ರ 28

ಮೊದಲ ಮೂರರ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಕೊನೆಯ ಎರಡರ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿ ಇದಲ್ಲದೆ ಬೇರೆ ಇದೆಯೇ ?

ಉತ್ತರ :

ಇಂತಹ ಬೇರೊಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2.$$

ಈ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವ ಬದಲು ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಅನುಕೂಲ. ಈಗ ಸಮೀಕರಣವು ಪಡೆಯುವ ಸರಳ ರೂಪ :

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=(x+2)^2+(x+3)^2.$$

ಇದರ ಆವರಣಗಳನ್ನು ಕಳಚಿ ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ ಲಭಿಸುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$x^2-10x-11=0,$$

ಅಂದರೆ,

$$x=5 \pm \sqrt{25+11}, \quad x_1=11, \quad x_2=-1.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣವುಳ್ಳ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯಾಸರಣಿಗಳಿವೆ. ಇವನ್ನು ರಚಿನ್‌ಸ್ಕಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸರಣಿಗಳು :

10, 11, 12, 13, 14

ಹಾಗೂ,

–2, –1, 0, 1, 2.

ಈ ಸರಣಿಯ ವಿಶೇಷತೆಯನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸೋಣ :

$$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2.$$

ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ನಡುವಣ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಅದರ ಆಚೀಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಒಂದಂಕಿ ಅಧಿಕವಾಗಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿ ಯಾವುದು ?

ಉತ್ತರ :

ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದು x ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ಈ ಸಮೀಕರಣ ರಚಿಸಬಹುದು :

$$(x+1)^2 = x(x+2) + 1.$$

ಇದರ ಆವರಣಗಳನ್ನು ಕಳಚಿದಾಗ ಒದಗುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$x^2+2x+1=x^2+2x+1.$$

ಆದರೆ, ಇದರಿಂದ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, x ಎಂಬುದು ಸರ್ವಾನ್ವಯವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣವು x ನ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಂಡರೂ, ಅವು ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಣ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅಚಾನಕವಾಗಿ ಆಯ್ದ ಈ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

17, 18, 19,

ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸಿ :

$$18^2 - 17 \times 19 = 324 - 323 = 1.$$

ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯದನ್ನು x ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದಾಗಲಂತೂ ಈ ಗುಣಲಕ್ಷಣ ಸ್ಫುಟವಾಗಿ ಗೋಚರಿಸುತ್ತದೆ. ಈಗ ನೋಡಿ :

$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು ಸರ್ವಾನ್ವಯ ಎಂಬುದು ನಿಚ್ಚಳ. ■

ಅಧ್ಯಾಯ – ಏಳು

ಗರಿಷ್ಠ ಹಾಗೂ ಕನಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ರೋಚಕವಾದ ವಿಷಯದ ಬಗೆಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿವೆ - ಯಾವುದೇ ಪರಿಮಾಣದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು. ಇವನ್ನು ಹಲವು ವಿಧಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಅವುಗಳಲ್ಲೊಂದನ್ನು ಮುಂದೆ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಖ್ಯಾತ ರಷ್ಯನ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಪಿ. ಎಲ್. ಚೆಬಿಷೆವ್ *Drawing Geographical Maps* ಎಂಬ ತಮ್ಮ ಪ್ರಬಂಧದಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿ ಬರೆದಿದ್ದಾರೆ. ಇಡೀ ಮಾನವ ಸಮುದಾಯಕ್ಕೆ ಒದಗುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ನೆರವಾಗುವ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ವಿಧಾನಗಳ ಮೌಲ್ಯವು ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒದಗಿ ಬಂದ ಕನಿಷ್ಠ ಸೌಲಭ್ಯಗಳನ್ನು ಗರಿಷ್ಠ ಮಂದಿಗೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಬಗೆ ಹೇಗೆ ?

ಎರಡು ರೈಲುಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಎರಡು ರೈಲಿನ ಹಳಿಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆ ಛೇದನಬಿಂದುವಿನ ಕಡೆಗೆ ಎರಡು ರೈಲುಗಳು ಧಾವಿಸುತ್ತಿವೆ. ಒಂದು ರೈಲು ಆ ಛೇದನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 40 ಕಿ. ಮೀ. ದೂರವಿರುವ ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಹೊರಟಿದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಅದೇ ಛೇದನಬಿಂದುವಿನಿಂದ 50 ಕಿ. ಮೀ. ದೂರದ ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಹೊರಟಿದೆ. ಮೊದಲ ರೈಲು ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 800 ಮೀಟರ್ ವೇಗದಲ್ಲೂ, ಎರಡನೆಯದು ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 600 ಮೀಟರ್ ವೇಗದಲ್ಲೂ ಓಡುತ್ತಿವೆ.

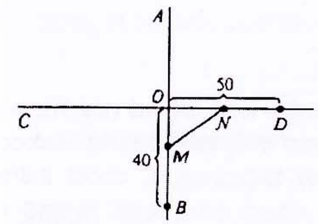
ಅವೆರಡೂ ರೈಲುಗಳು ಹೊರಟು ಎಷ್ಟು ನಿಮಿಷಗಳ ಬಳಿಕ ಅವುಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ? ಆ ಅಂತರ ಎಷ್ಟೆಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

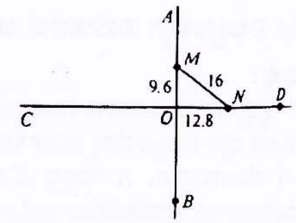
ರೈಲುಗಳ ಚಲನೆ ಸೂಚಿಸುವ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯೋಣ. AB ಮತ್ತು CD ಸರಳ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ರೈಲು ಹಳಿಗಳು (ಚಿತ್ರ 29). B ನಿಲ್ದಾಣವು ಛೇದನಬಿಂದು '0' ಇಂದ 40 ಕಿ. ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. 'D' ನಿಲ್ದಾಣವು 0 ಇಂದ 50 ಕಿ. ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಅವೆರಡೂ ರೈಲುಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರ x ನಿಮಿಷಗಳ ಬಳಿಕ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದಿರಲಿ. ಈ ಅಂತರ $MN = m$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ Bಯಿಂದ ಹೊರಟ ರೈಲು ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ $BM = 0.8x$ ಏಕೆಂದರೆ 800 ಮೀಟರುಗಳು ಅಥವಾ 0.8 ಕಿ. ಮೀ.ಗಳನ್ನು ಅದು ಒಂದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, $OM = 40 - 0.8x$. ಇದೇ ರೀತಿ, $ON = 50 - 0.6x$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$$MN = m = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{(40-0.8x)^2 + (50-0.6x)^2}\,.$$



ಚಿತ್ರ 29



ಚಿತ್ರ 30

ಅಂದರೆ,

$$m = \sqrt{(40-0.8x)^2 + (50-0.6x)^2}\,.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿ ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$x^2 - 124x + 4100 - m^2 = 0.$$

x ನ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಯಲು ಈ ಸಮೀಕರಣ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಅಂತಿಮವಾಗಿ ದೊರಕುವ ಉತ್ತರ :

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}\,.$$

ಇದರಲ್ಲಿ ನಿಮಿಷಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ x ಊಹಾ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವಾದ್ದರಿಂದ $m^2 - 256$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಅಥವಾ ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ ಸೊನ್ನೆಯಾದರೂ ಆಗಿರಬೇಕು. m ನ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. m ಆಗ,

$$m^2 = 256 \text{ ಅಥವಾ } m = 16.$$

ಇಲ್ಲಿ m 16ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಏಕೆಂದರೆ, m 16ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ x ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ $m^2 - 256 = 0$ ಆದಾಗ $x = 62$.

ಈ ತರ್ಕದ ಸಾರಾಂಶವೆಂದರೆ : ರೈಲುಗಳು ಹೊರಟು 62 ನಿಮಿಷಗಳ ಬಳಿಕ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಕನಿಷ್ಠ ದೂರದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಆಗ ಅವುಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರ 16 ಕಿ. ಮೀ.

ಆ ಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ರೈಲುಗಳು ಎಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ? ಎಂದು ನೋಡೋಣ. OM ನ ಉದ್ದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕೋಣ :

$$40 - 62 \times 0.8 = -9.6.$$

ರೈಲು ಛೇದನಬಿಂದುವನ್ನು ದಾಟಿ 9.6 ಕಿ. ಮೀ.ಗಳಷ್ಟು ಮುಂದೆ ಹೋಗಿದೆ ಎಂಬುದೇ ಇಲ್ಲಿನ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯ ಅರ್ಥ. ಈಗ ON ನ ಉದ್ದವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ :

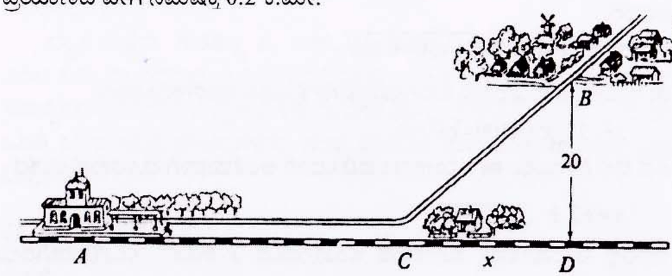
$$50 - 62 \times 0.6 = 12.8$$

ಎರಡನೆಯ ರೈಲು ಛೇದನಬಿಂದು ತಲುಪಲು ಇನ್ನೂ 12.8 ಕಿ. ಮೀ. ಕ್ರಮಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇದರ ಅರ್ಥ. ರೈಲುಗಳ ಈ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಚಿತ್ರ 30ರಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ನಾವು ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸುವ ಮುನ್ನ ಊಹಿಸಿದ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ರೈಲುಗಳು ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಈಗ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ನಮ್ಮ ನಕ್ಷೆ ತಪ್ಪಾಗಿದ್ದರೂ ಸಮೀಕರಣವೂ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನೇ ನೀಡಿತು. ಗಣಿತ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಬೀಜಗಣಿತ ನಿಯಮಗಳಿಂದಾಗಿಯೇ ಈ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು.

ಧ್ವಜ ನಿಲ್ದಾಣಕ್ಕಾಗಿ ನಿವೇಶನದ ಆಯ್ಕೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ರೈಲ್ವೆ ಹಳಿಯೊಂದರಿಂದ 20 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ B ಎಂಬ ಹಳ್ಳಿ ಇದೆ (ಚಿತ್ರ 31). ಈಗ C ಎಂಬ ಧ್ವಜ ನಿಲ್ದಾಣವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ನಿವೇಶನದ ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದೆ. Aಯಿಂದ B ಗೆ ಹೋಗುವಾಗ, A ಯಿಂದ C ತನಕ ರೈಲು ದಾರಿಯಲ್ಲೂ, C ಯಿಂದ B ತನಕ ಹೆದ್ದಾರಿಯಲ್ಲೂ ಪ್ರಯಾಣಿಸಲು ಅತ್ಯಂತ ಕನಿಷ್ಠ ಸಮಯ ತಗಲುವಂತಹ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ C ಇರಬೇಕು. ರೈಲು ಪ್ರಯಾಣದ ವೇಗ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 0.8 ಕಿ.ಮೀ. ಹಾಗೂ ಹೆದ್ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಯಾಣದ ವೇಗ ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 0.2 ಕಿ.ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 31

ಉತ್ತರ :

AD ದೂರವನ್ನು 'a' ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ (AD ರೇಖೆಗೆ D ಯಿಂದ ಎಳೆದ BD ಲಂಬ ರೇಖೆಯ ಪಾದ ಬಿಂದುವಿಗೂ A ಗೂ ಇರುವ ದೂರ). CDದೂರವು x ಎಂದಿರಲಿ ಆಗ $AC = AD - CD = a - x$ ಮತ್ತು $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}$.

ರೈಲಿಗೆ ACದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ತಗಲುವ ಸಮಯ,

$$\frac{AC}{0.8} = \frac{a-x}{0.8}.$$

ಹೆದ್ದಾರಿಯಲ್ಲಿ Cಯಿಂದ Bಗೆ ಹೋಗಲು ತಗಲುವ ಸಮಯ,

$$\frac{CB}{0.2} = \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2}.$$

Aಯಿಂದ Bಗೆ ಹೋಗಲು ತಗಲುವ ಒಟ್ಟು ಸಮಯ,

$$\frac{a-x}{0.8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2}.$$

ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು m ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಇದುವೇ ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ತಗಲುವ ಕನಿಷ್ಠ ಸಮಯ. ಈಗ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ

$$\frac{a-x}{0.8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2} = m$$

ಇದನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯಬಹುದು :

$$-\frac{x}{0.8} + \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0.2} = m - \frac{a}{0.8}.$$

ಇದನ್ನು 0.8 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$-x + 4\sqrt{x^2+20^2} = 0.8m - a.$$

ಇದರಲ್ಲಿ (0.8 m − a) ಎಂಬುದನ್ನು k ಯಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿರುವ ವರ್ಗಮೂಲ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಕಳಚಲು ಇಡೀ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದಾಗ,

$$15x^2 - 2kx + 6\,400 - k^2 = 0,$$

ಇದರಿಂದ,

$$x = \frac{k \pm \sqrt{16k^2 - 96\,000}}{15}.$$

k = (0.8 m − a) ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, k ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ m ಕೂಡ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರಬೇಕು. ಅದೇ ಪ್ರಕಾರ, m ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ k ಕೂಡ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರಬೇಕು.* ಈಗ, x ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ, $16k^2$ ಎಂಬುದು ಕನಿಷ್ಠ ಪಕ್ಷ 96 000 ವಾದರೂ ಆಗಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, $16k^2$ ನ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ 96 000. ಈ ಪ್ರಕಾರ, m ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರುವಾಗ $16k^2$ ನ ಬೆಲೆ :

$$16k^2 = 96\,000$$

ಇದರಿಂದ,

$$k = \sqrt{6000}$$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$x = \frac{k \pm 0}{15} = \frac{\sqrt{6000}}{15} \approx 5.16.$$

ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಸಾರಾಂಶ : a = AD ಯ ಉದ್ದ ಎಷ್ಟೇ ಇದ್ದರೂ, ಧ್ವಜ ನಿಲ್ದಾಣವು D ಯಿಂದ ಸುಮಾರು 5 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು.

ಸಹಜವಾಗಿಯೇ, $x < a$ ಆಗಿರುವ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಈ ಉತ್ತರ ಸರಿ ಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಯಾಕೆಂದರೆ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೂಪಿಸಿದಾಗ $a-x$ ಎಂಬುದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಒಂದು ವೇಳೆ $x = a \approx 5.16$ ಆಗಿದ್ದರಂತೂ ಧ್ವಜ ನಿಲ್ದಾಣವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಅವಶ್ಯಕತೆಯೇ ಇಲ್ಲ. ಆಗ ಹೆದ್ದಾರಿಯನ್ನು ಮುಖ್ಯ ನಿಲ್ದಾಣಕ್ಕೆ ನೇರವಾಗಿ ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ a ದೂರವು 5.16 ಕಿ. ಮೀ.ಗಳಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುವ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲೂ ಹೀಗೆಯೇ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಜಾಣತನ ತೋರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಿವೇಚನೆಯಿಲ್ಲದೆ ಅನುಸರಿಸುವುದಾದರೆ, ಮುಖ್ಯ ನಿಲ್ದಾಣದ ಪಕ್ಕದಲ್ಲೇ

* $k > 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ; ಯಾಕೆಂದರೆ, $0.8\,m = a - x + 4\sqrt{x^2+20^2} > a - x + x = a$.

ಧ್ವಜ ನಿಲ್ದಾಣ ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕು. ಇದು ಅಸಂಬದ್ಧ ಆಗ $x > a$ ಆಗುವುದರಿಂದ, ರೈಲು ಪ್ರಯಾಣದ (ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿದ) ಅವಧಿ ಋಣಾತ್ಮಕ ಸಮಯವಾಗುತ್ತದೆ !

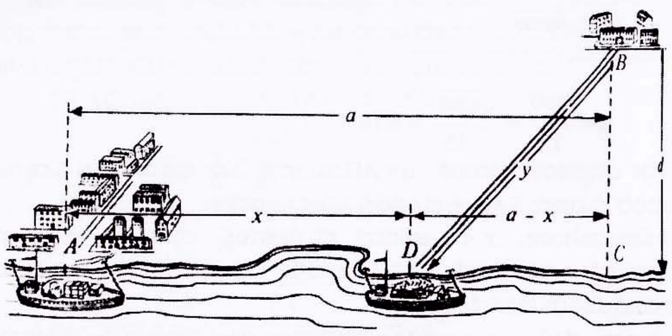
$$\frac{a-x}{0.8}$$

ಇದೊಂದು ಬೋಧಪ್ರದ ಉದಾಹರಣೆ, ಗಣಿತದ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಬಳಸುವಾಗ ಹಾಗೂ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಅರ್ಥವಿವರಣೆ ಮಾಡುವಾಗ ಎಚ್ಚರದಿಂದ ಇರಬೇಕು ಎಂದು ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ, ಈ ಸೂತ್ರಗಳ ಬಳಕೆಗೆ ಆಧಾರವಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸದಿದ್ದರೆ, ಅಂತಿಮ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಅರ್ಥಹೀನವಾಗಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಡಬೇಕು.

ಅನುಕೂಲವಾದ ಹೆದ್ದಾರಿ

ಸಮಸ್ಯೆ :

A ಎಂಬ ಪಟ್ಟಣ ನದಿಯ ದಡದಲ್ಲಿದೆ. ಅಲ್ಲಿಂದ B ಪಟ್ಟಣಕ್ಕೆ ಸರಕನ್ನು ಕಳುಹಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. B ನಗರವು A ಯಿಂದ ನದಿಯ ದಡದ ಗುಂಟ a ಕಿ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲೂ, ನದಿಯಿಂದ d ಕಿ.ಮೀ. ಒಳನಾಡಿನಲ್ಲೂ ಇದೆ. (ಚಿತ್ರ 32). A ಯಿಂದ B ಗೆ ಸರಕು ಸಾಗಾಣಿಕೆಯ ವೆಚ್ಚ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವಂತೆ, ನದಿಯಿಂದ B ಗೆ ಹೆದ್ದಾರಿ ನಿರ್ಮಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ? ಎಂಬುದೇ ಸಮಸ್ಯೆ. ಒಂದು ಟನ್ ಸರಕನ್ನು 1 ಕಿ.ಮೀ. ದೂರ ನದಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಗಿಸಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವು ಇದೇ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಹೆದ್ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 32

ಉತ್ತರ :

AD ಯನ್ನು x ಎಂದೂ DB ಯನ್ನು y ಎಂದೂ ಸೂಚಿಸೋಣ; AC ಯನ್ನು a ಎಂದೂ BCಯನ್ನು d ಎಂದೂ (ಚಿತ್ರ 32ರಲ್ಲಿ) ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಹೆದ್ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಸರಕು ಸಾಗಣೆ ವೆಚ್ಚವು, ನದಿಯಲ್ಲಾಗುವ ವೆಚ್ಚದ ಇಮ್ಮಡಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಷರತ್ತುಗಳ ಪ್ರಕಾರ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೊತ್ತವು ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರಬೇಕು :

$$x+2y$$

ಈ ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ m ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$x+2y=m.$$

ಆದರೆ $x = (a - DC)$ ಹಾಗೂ $DC = \sqrt{y^2-d^2}$; ಇದನ್ನು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿದಾಗ,

$$a-\sqrt{y^2-d^2}+2y=m$$

ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಕಳಚಿದಾಗ,

$$3y^2-4(m-a)y+(m-a)^2+d^2=0.$$

ಇದನ್ನು y ಯ ಬೆಲೆ ತಿಳಿಯಲು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$y=\frac{2}{3}(m-a)\pm\frac{\sqrt{(m-a)^2-3d^2}}{3}.$$

y ಎಂಬುದು ನೈಜ (Real) ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ $(m-a)^2$ ಎಂಬುದು ಕನಿಷ್ಠ $3d^2$ಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. $(m-a)^2$ನ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $3d^2$. ಹಾಗಾಗಿ,

$$m-a=d\sqrt{3},\ y=\frac{2(m-a)+0}{3}=\frac{2d\sqrt{3}}{3};$$

$\sin\angle BDC=d\div y$, ಅಥವಾ

$$\sin\angle BDC=\frac{d}{y}=d\div\frac{2d\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಷಯವೆಂದರೆ: 60° ಕೋನದ sine = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ಈ ಪ್ರಕಾರ AC ಯ ದೂರ ಎಷ್ಟೇ ಇದ್ದರೂ ಹೆದ್ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ನದಿಗೆ 60° ಕೋನದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು.

ಹಿಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿದ್ದಂತಹ ವಿಚಿತ್ರ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳೇ ಇದರಲ್ಲೂ ಎದುರಾಗುತ್ತವೆ. ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ, ಈ ಮೇಲಿನ ಉತ್ತರ ಕಾರ್ಯಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ನದಿಗೆ 60° ಕೋನದಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಹೆದ್ದಾರಿಯು A ಪಟ್ಟಣದ ಆಚೆ ಬದಿಯಿಂದ ಹಾಯ್ದು ಹೋಗುವಂತಹ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ B ಪಟ್ಟಣ ಇರುವುದಾದರೆ ಈ ಉತ್ತರವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅಂಥ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ, B ಯಿಂದ A ಗೆ ನೇರವಾಗಿ ಹೆದ್ದಾರಿ ರಚಿಸಿ, ನದಿಯ ಮೂಲಕ ಸಾಗಾಣಿಕೆಯ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಕೈಬಿಡಬೇಕು.

ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುವುದು ಯಾವಾಗ ?

ಗರಿಷ್ಠ ಹಾಗೂ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳ ಬಗೆಗಿನ (ಅನಿಶ್ಚಿತ ಪರಿಮಾಣದ ಗರಿಷ್ಠ ಹಾಗೂ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕುರಿತ) ಅನೇಕ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು, ಈಗ ಪರಿಚಯಿಸಲಿರುವ ಬೀಜಗಣಿತದ ಪ್ರಮೇಯದ ನೆರವಿನಿಂದ ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಇದರ ತರ್ಕವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ :

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡು ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುವಂತೆ, ಅದನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ?

ಉತ್ತರ :

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ a ಎಂದಿರಲಿ. a ಯನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು :

$$\frac{a}{2}+x \quad \text{ಹಾಗೂ} \quad \frac{a}{2}-x.$$

ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು $\frac{1}{2}$a ಗೂ, ಈ ಭಾಗಗಳಿಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು,

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right) = \frac{a^2}{4}-x^2.$$

ಇಲ್ಲಿ x ನ ಪ್ರಮಾಣ ಕಡಿಮೆಯಾದಂತೆಲ್ಲ ಈ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಪ್ರಮಾಣವು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಅಂದರೆ, ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಡಿಮೆಯಾದಂತೆ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತದೆ. $x=0$ ಆದಾಗ, ಅಂದರೆ ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳು $\frac{a}{2}$ ಗೆ ಸಮವಾದಾಗ ಈ ಗುಣಲಬ್ಧ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿವರಣೆಯ ಸಾರಾಂಶವೆಂದರೆ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇಬ್ಭಾಗ ಮಾಡಬೇಕು. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

ಈಗ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸೋಣ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂರು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುವಂತೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕು ?

ಉತ್ತರ :

ಹಿಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸೋಣ.

'a' ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂರು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸೋಣ. ಈಗ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವೊಂದು ಭಾಗವೂ $\frac{a}{3}$ ಗೆ ಸಮವಲ್ಲ ಎಂದಿರಲಿ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಭಾಗ $\frac{a}{3}$ ಗಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. (ಅವು ಮೂರು ಭಾಗಗಳೂ $\frac{a}{3}$ ಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ), ಆ ಭಾಗವನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸೋಣ :

$$\frac{a}{3}+x.$$

ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಭಾಗ $\frac{a}{3}$ ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸೋಣ :

$$\frac{a}{3}-y.$$

x ಮತ್ತು y ಗಳು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು. ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಮೂರನೆಯ ಭಾಗವನ್ನು ಹೀಗೆ ಸೂಚಿಸಬೇಕು :

$$\frac{a}{3}+y-x.$$

$\frac{a}{3}$ ಮತ್ತು $(\frac{a}{3}+x-y)$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು a ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊದಲೆರಡು ಭಾಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ; ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಅಥವಾ $(x-y)$ ಎಂಬುದು ಮೊದಲೆರಡು ಭಾಗಗಳ ನಡುವಣ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾದ $(x+y)$ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ. ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ, ಈ ಹಿಂದಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು 'a' ನ ಮೊದಲೆರಡು ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕ :

$$\frac{a}{3}\left(\frac{a}{3}+x-y\right)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, a ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊದಲೆರಡು ಭಾಗಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದರೆ ಹಾಗೂ ಮೂರನೆಯ ಭಾಗವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅಧಿಕವಾಗುವುದು :

$$\frac{a}{3} \text{ ಮತ್ತು } \frac{a}{3}+x-y$$

ಈಗ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಭಾಗ $(\frac{a}{3})$ ಗೆ ಸಮ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಉಳಿದೆರಡು ಭಾಗಗಳು ಹೀಗಿರುತ್ತವೆ :

$$\frac{a}{3}+z \quad \text{ಹಾಗೂ} \quad \frac{a}{3}-z.$$ (ಇಲ್ಲಿ z ಎನ್ನುವುದೊಂದು ಅಂಕಿ)

ಈಗ ನಾವು ಕೊನೆಯ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು $\frac{a}{3}$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ (ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವಂತೂ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ) ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪುನಃ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದು :

$$\frac{a}{3} \times \frac{a}{3} \times \frac{a}{3} = \frac{a^3}{27}.$$

ಈ ವಿವರಣೆಯ ಸಾರಾಂಶ: a ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮೂರು ಅಸಮ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿದರೆ, ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು $\frac{a^3}{27}$ ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ (ಕೂಡಿಸಿದಾಗ a ಮೊತ್ತ ನೀಡುವ) ಮೂರು ಸಮ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, ನಾಲ್ಕು, ಐದು ಹಾಗೂ ಅಧಿಕ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೂ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಈಗ ಅಧಿಕ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

ಸಮಸ್ಯೆ :

$x+y=a$ ಆದಾಗ x^py^q ಎಂಬುದು ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಬೇಕಾದರೆ x ಹಾಗೂ y ಯ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ :

x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ ?

$$x^p(a-x)^q$$

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $1/p^pq^q$ ಎಂಬುದರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ದೊರಕುವ ಹೊಸ ಸಂಖ್ಯೆ :

$$\frac{x^p(a-x)^q}{p^p q^q}$$

ಇದರ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಗರಿಷ್ಠವಾದಾಗೆಲ್ಲ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ.

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪುನಃ ರಚಿಸೋಣ :

$$\underbrace{\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\ldots}_{p\text{ಬಾರಿ}}\times\underbrace{\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\ldots}_{q\text{ಬಾರಿ}}$$

ಈ ಎಲ್ಲ ಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತ :

$$\underbrace{\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\ldots}_{p\text{ಬಾರಿ}}+\underbrace{\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}+\ldots}_{q\text{ಬಾರಿ}}$$

$$=\frac{px}{p}+\frac{q(a-x)}{q}=x+a-x=a,$$

ಇದರರ್ಥ, ಈ ಪರಿಮಾಣವು ಸ್ಥಿರ.

ಈ ಮುನ್ನ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಿದ್ದರ ಆಧಾರದಿಂದ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಕಗಳಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲವೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾದಾಗ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು :

$$\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\ldots\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\ldots$$

ಅಂದರೆ, ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಲು, ಈ ಗುಣಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಬೇಕು :

$$\frac{x}{p}=\frac{a-x}{q}.$$

ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ, $a-x=y$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಕೆಲವು ಸರಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ನಡೆಸಿ, ಈ ಅನುಪಾತ ಪಡೆಯೋಣ :

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}.$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ, x^py^q ಎಂಬ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ ($x+y$ ಮೊತ್ತವು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದಾಗ) :

$$x\div y = p\div q.$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ,

$x^py^qz^r$, $x^py^qz^rt^u$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಗುಣಲಬ್ಧಗಳು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ($x+y+z$,$x+y+z+t$ ಇತ್ಯಾದಿ ಮೊತ್ತಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದಾಗ), ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು :

$$x\div y\div z=p\div q\div r,\quad x\div y\div z\div t=p\div q\div r\div u.$$

ಮೊತ್ತವು ಕನಿಷ್ಠವಾಗುವುದು ಯಾವಾಗ ?

ಬೀಜಗಣಿತದ ಉಪಯುಕ್ತ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಮೂಲಕ ತಮ್ಮ ಚಾತುರ್ಯವನ್ನು ಒರೆಗೆ ಹಚ್ಚಲು ಇಚ್ಛಿಸುವ ಓದುಗರು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಾದಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬಹುದು :

1. ಸ್ಥಿರ ಗುಣಲಬ್ಧ ಒದಗಿಸುವ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾನವಾದಾಗ ಕನಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ.

   ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಗುಣಲಬ್ಧ 36ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

   4 + 9 = 13, 3 + 12 = 15, 2 + 18 = 20, 1 + 36=37, ಅಂತಿಮವಾಗಿ 6+6 = 12.

2. ಸ್ಥಿರ ಗುಣಲಬ್ಧ ಒದಗಿಸುವ ಹಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನವಾದಾಗ ಕನಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ.

   ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಗುಣಲಬ್ಧ 216ನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

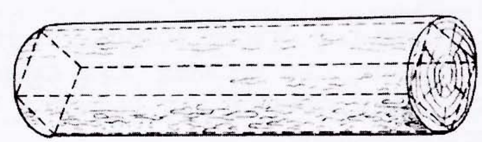
   3 + 12 + 6 = 21, 2 + 18 + 6 = 26, 9 + 6 + 4 = 19, ಆದರೆ, 6 + 6 + 6 = 18.

ಈ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಬಳಕೆಯ ಕೆಲವು ಪ್ರಕರಣಗಳು ಹೀಗಿವೆ –

ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರದ ಮರದ ತೊಲೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಸಿಲಿಂಡರಾಕೃತಿಯ ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಯಿಂದ ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರದ ಆಯತಾಕಾರದ ತೊಲೆಯನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ತೊಲೆಯ ಅಡ್ಡ ಛೇದದ ಆಕಾರ ಯಾವುದು ? (ಚಿತ್ರ 33).



ಚಿತ್ರ 33

ಉತ್ತರ :

ತೊಲೆಯ ಆಯತಾಕಾರ ಅಡ್ಡ ಛೇದದ ಬದಿಗಳು x ಮತ್ತು y ಎಂದಾದರೆ, ಪೈಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ,

$$x^2+y^2=d^2$$

ಇಲ್ಲಿ ದಿಮ್ಮಿಯ ವ್ಯಾಸವು d. ತೊಲೆಯ ಅಡ್ಡಛೇದದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಗರಿಷ್ಠವಾದಾಗ, ಅಂದರೆ xy ಗರಿಷ್ಠವಾದಾಗ, ಅದರ ಗಾತ್ರವೂ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ xy ಗರಿಷ್ಠವಾದರೆ, x^2y^2 ಕೂಡ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ. x^2+y^2 ಮೊತ್ತವು ಸ್ಥಿರವಾದ್ದರಿಂದ ಈ ಮುನ್ನ ಸಾಧಿಸಿದ ತರ್ಕದ ಪ್ರಕಾರ, x^2y^2 ಗುಣಲಬ್ಧ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಈ ಭಾಗಗಳು ಸಮವಾಗಬೇಕು :

$$x^2=y^2 \text{ ಅಥವಾ } x=y.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ತೊಲೆಯ ಅಡ್ಡಛೇದ ಚೌಕಾಕಾರವಾಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಎರಡು ನಿವೇಶನಗಳಿಗೆ ಬೇಲಿ

ಸಮಸ್ಯೆಗಳು :

1. ನಿಶ್ಚಿತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಆಯಾತಾಕಾರದ ಜಾಗವೊಂದರ ಸುತ್ತ ಹಾಕುವ ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಆ ಜಾಗದ ಆಕಾರ ಹೇಗಿರಬೇಕು ?
2. ನಿಶ್ಚಿತ ಉದ್ದದ ಬೇಲಿ ಹಾಕಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಜಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಆ ಜಾಗದ ಆಕಾರ ಹೇಗಿರಬೇಕು ?

ಉತ್ತರಗಳು :

1. ಆಯತಾಕಾರದ ಜಾಗದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಆಕಾರವು ಅದರ ಬದಿಗಳಾದ x ಮತ್ತು y ಯ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಜಾಗದ ಬದಿಗಳು x ಮತ್ತು y ಎಂದಾದರೆ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ xy ಮತ್ತು ಆ ಜಾಗದ ಸುತ್ತ ಹಾಕುವ ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದ $2x+2y$. ಇಲ್ಲಿ $x+y$ ಕನಿಷ್ಠವಾದಾಗ ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದವೂ ಕನಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ.

   xy ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ, $x+y$ ಮೊತ್ತವು ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ x ಎಂಬುದು y ಗೆ ಸಮವಾಗಬೇಕು ($x=y$) ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರ : ಚೌಕಾಕಾರ.
2. ಒಂದು ಆಯತದ ಬದಿಗಳು x ಮತ್ತು y ಎಂದಾದರೆ, ಅದರ ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದ $2x+2y$ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ xy ಈ ಗುಣಲಬ್ಧ (ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, $4xy$ (ಅಥವಾ $2x \times 2y$) ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕು. ಈಗ, ಎರಡನೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಗುಣಕಗಳಾದ $2x + 2y$ ಯ ಮೊತ್ತ ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ, ಆ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ $2x$ ಎಂಬುದು 2y ಗೆ ಸಮವಾಗಬೇಕು ($2x = 2y$). ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರ: ಚೌಕಾಕಾರ.

   ಜ್ಯಾಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದ ಹಲವು ಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೇವೆ. ಆ ಪರಿಚಿತ ಲಕ್ಷಣಗಳಿಗೆ ಇವೆರಡನ್ನು ಸೇರಿಸೋಣ : ವಿವಿಧ ಆಯತಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸುತ್ತಳತೆಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನೂ ಹೊಂದಿರುವ ಆಯತಾಕಾರವು ಚೌಕಾಕಾರವಾಗಿದೆ.

ಗಾಳಿಪಟದ ಆಕಾರ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ವೃತ್ತಖಂಡದ ಆಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಗಾಳಿಪಟವೊಂದಿದೆ. ಈ ಗಾಳಿಪಟದ ಆಕಾರವನ್ನು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸುತ್ತಳತೆಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಹೊಂದುವಂತೆ ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಗಾಳಿಪಟದ ಆಕಾರ ಹೇಗಿರಬೇಕು ?

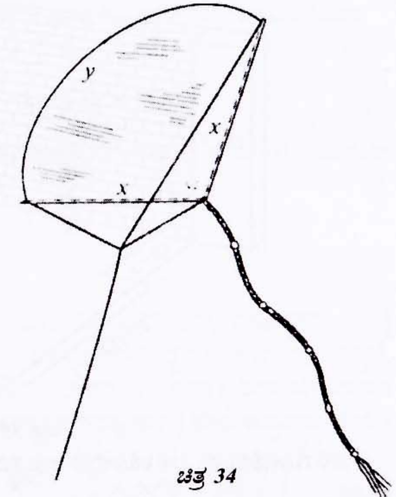
ಉತ್ತರ :

ಸಮಸ್ಯೆಯ ಷರತ್ತುಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸೋಣ: ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸುತ್ತಳತೆಯಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕಂಸದ ಅಳತೆ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಅಳತೆಗಳ ಸಂಬಂಧ ಹೇಗಿರಬೇಕು ?

ವೃತ್ತಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯ x ಮತ್ತು ಕಂಸ y ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ಸುತ್ತಳತೆ 'l' ಹಾಗೂ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 'S' ಇವನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 34 ನೋಡಿ).

$$l = 2x + y,$$

$$S = \frac{xy}{2} = \frac{x(l-2x)}{2}.$$



ಚಿತ್ರ 34

$2x\ (l - 2x)$ ನ ಪರಿಮಾಣವು ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ನಾಲ್ಕುಪಟ್ಟು, ಇದು x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೋ, x ನ ಅದೇ ಬೆಲೆಗೆ S ಪರಿಮಾಣವೂ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಘಟಕಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಅಂದರೆ $2x + (l - 2x) = l$, ಸ್ಥಿರ ಮೊತ್ತವಾದ್ದರಿಂದ, ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಇವು ಸಮವಾಗಬೇಕು: $2x = l - 2x$. ಆಗ,

$$x = \frac{l}{4};$$

$$y = l - 2 \times \frac{l}{4} = \frac{l}{2}.$$

ಈ ವಿವರಣೆಯ ಸಾರಾಂಶ : ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸುತ್ತಳತೆಯಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಕಂಸದ ಉದ್ದದ ಅರ್ಧಭಾಗ ಇರಬೇಕು (ಅಥವಾ, ಕಂಸದ ಉದ್ದವು ತ್ರಿಜ್ಯದ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಬೇಕು ಅಥವಾ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಬಾಗಿದ ಭಾಗವು ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಬೇಕು). ವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನವು ಸುಮಾರು 115° ಅಥವಾ ಎರಡು ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು.* ಗಾಳಿಪಟವು ಹೇಗೆ ಹಾರುತ್ತದೆ ? ಎಂಬುದು ಬೇರೆಯೇ ಪ್ರಶ್ನೆ– ಅದನ್ನು ನಾವೀಗ ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿಲ್ಲ.

ಮನೆ ಕಟ್ಟುವುದು

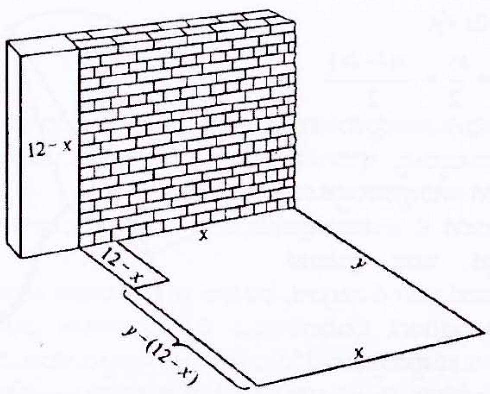
ಸಮಸ್ಯೆ :

ಭಾಗಶಃ ಕುಸಿದು ಬಿದ್ದ ಮನೆಯ ಒಂದು ಇಡೀ ಗೋಡೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ, ಹೊಸ ಮನೆ ಕಟ್ಟಬೇಕೆಂದಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಇಡೀ ಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ 12 ಮೀಟರ್‌ಗಳು. ಹೊಸ ಮನೆಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 112 ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗಳಿರಬೇಕು. ಈ ಮನೆ ನಿರ್ಮಾಣದ ಷರತ್ತುಗಳು ಹೀಗಿವೆ :–

1) ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೋಡೆಯನ್ನು ರಿಪೇರಿ ಮಾಡಲು, ಹೊಸ ಗೋಡೆ ಕಟ್ಟುವುದರ 25% ಖರ್ಚು ಸಾಕು.
2) ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಹಳೆ ಗೋಡೆ ಕೆಡವಿ, ಅದರ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಹೊಸ ಗೋಡೆ ಕಟ್ಟಲು, ಹೊಸ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಹೊಸ ಗೋಡೆ ಕಟ್ಟುವುದರ 50% ಖರ್ಚು ಸಾಕು.

---

* 1 ರೇಡಿಯನ್ ≈ 57°.2958 ಇದೊಂದು ಗಣಿತ ಸ್ಥಿರಾಂಕ. – ಸಂಪಾದಕರು



ಚಿತ್ರ 35

ಹಳೆ ಗೋಡೆಯನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ವಿಧಾನ ಯಾವುದು ?

ಉತ್ತರ :

x ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಹಳೆ ಗೋಡೆ ಉಳಿಸಿಕೊಂಡು, ಉಳಿದ $12-x$ ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಗೋಡೆ ಕೆಡವಬೇಕು ಎಂದಿರಲಿ; ಹೀಗೆ ಕೆಡವಿದ ಗೋಡೆಯ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಹೊಸ ಮನೆಯ ಗೋಡೆಯ ಭಾಗವೊಂದನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ಬಳಸಲಾಗುವುದು (ಚಿತ್ರ 35). ಹೊಸ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಒಂದು ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೋಡೆ ಕಟ್ಟಲು ತಗಲುವ ಖರ್ಚು 'a' ಎಂದಾದರೆ, x ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಹಳೆ ಗೋಡೆ ರಿಪೇರಿಗೆ ತಗಲುವ ಖರ್ಚು $\frac{ax}{4}$; ಅದೇ ಪ್ರಕಾರ $12-x$ ಉದ್ದದ ಗೋಡೆಯ ಭಾಗವೊಂದನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ತಗಲುವ ಖರ್ಚು $\frac{a(12-x)}{2}$; ಗೋಡೆಯ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ತಗಲುವ ಖರ್ಚು $a[y-(12-x)]$ ಅಥವಾ $a(y+x-12)$; ಮೂರನೆಯ ಗೋಡೆ ಕಟ್ಟುವ ಖರ್ಚು ax, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಗೋಡೆಯ ಖರ್ಚು ay.ಗೋಡೆಗಳ ಪೂರ್ತಿ ನಿರ್ಮಾಣದ ಖರ್ಚು :

$$\frac{ax}{4}+\frac{a(12-x)}{2}+a(y+x-12)+ax+ay=\frac{a(7x+8y)}{4}-6a.$$

ಈ ಪರಿಮಾಣ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಮೊತ್ತ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕು :

$$7x+8y.$$

ಮನೆಯ ನೆಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ xy ಯು 112 ಅಂತ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ :

$$7x \times 8y = 56 \times 112.$$

ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ $7x+8y$ ಮೊತ್ತವು ಕನಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಇವುಗಳು ಸಮವಾಗಬೇಕು :

$$7x=8y$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ,

$$y=\frac{7}{8}x.$$

y ಯ ಈ ಸೂಚ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು, $xy=112$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸೋಣ.

ಈಗ,

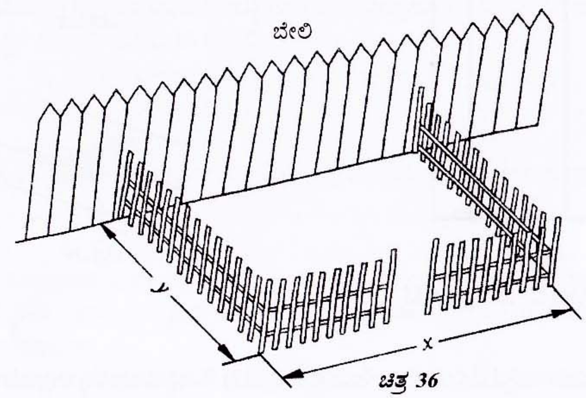
$$\frac{7}{8}x^2=112, \qquad x=\sqrt{128}\approx 11.3.$$

ಹಳೆಗೋಡೆಯ ಉದ್ದ 12 ಮೀಟರುಗಳಾದ್ದರಿಂದ, ಅದರಲ್ಲಿ ಕೇವಲ 0.7 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ಗೋಡೆಯನ್ನು ಕೆಡವಬೇಕು.

ಬೇಲಿ ಕಟ್ಟುವುದು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಬೇಸಗೆ ವಸತಿಗೃಹವೊಂದನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ವಸತಿಗೃಹದ ಜಾಗಕ್ಕೆ ಬೇಲಿ ಕಟ್ಟಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈಗಿರುವ ವಸ್ತುಗಳು l ಮೀಟರ್‌ಗಳ ಉದ್ದದ ಗೋಡೆಗೆ ಸಾಕಾಗುತ್ತವೆ. ಮುಂಚೆ ಕಟ್ಟಿದ ಎತ್ತರದ ಹಲಗೆಗಳ ಗೋಡೆಯ ಭಾಗವನ್ನೇ ಒಂದು ಬದಿಯ ಬೇಲಿಯಾಗಿ ಬಳಸಬಹುದು. ಈ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ, ಆಯತಾಕಾರದ ಗರಿಷ್ಠ ಜಾಗಕ್ಕೆ ಬೇಲಿ ಕಟ್ಟುವುದು ಹೇಗೆ ?



ಚಿತ್ರ 36

ಉತ್ತರ :

ಎತ್ತರದ ಹಲಗೆಗಳ ಬೇಲಿಯಲ್ಲಿ, ವಸತಿಗೃಹದ ಬೇಲಿಗೆ ಬಳಸುವ ಉದ್ದ x ಎಂದಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 36 ನೋಡಿ). ವಸತಿ ಗೃಹದ ಬೇಲಿಯ ಅಗಲ (ಅಂದರೆ ಎತ್ತರದ ಹಲಗೆಗಳ ಬೇಲಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಭಾಗ) y ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ, ವಸತಿಗೃಹದ ಜಾಗದ ಸುತ್ತ ಹೊಸತಾಗಿ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದ ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದ $x+2y$. ಈ ಪ್ರಕಾರ,

$$x+2y=l.$$

ವಸತಿಗೃಹದ ಜಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$S=xy=y(l-2y).$$

ಈ ಪರಿಮಾಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, $2y(l-2y)$ ಎಂಬುದು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕು.

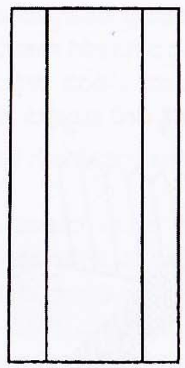
$2y(l-2y)$ ಎಂಬುದು ಜಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಇಮ್ಮಡಿ. ಇದು ಎರಡು ಗುಣಕಗಳ ಸ್ಥಿರ ಮೊತ್ತ l ಆದ್ದರಿಂದ, ಜಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಇವು ಸಮವಾಗಬೇಕು :

$$2y = l-2y$$

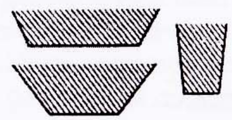
ಈಗ

$$y=\frac{l}{4},\quad x=l-2y=\frac{l}{2}.$$

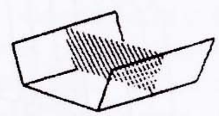
ಈ ಪ್ರಕಾರ $x=2y$ ಪ್ರಕಾರ ಅಥವಾ ವಸತಿಗೃಹದ ಜಾಗದ ಉದ್ದವು ಅದರ ಅಗಲದ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗಿರಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 37



ಚಿತ್ರ 38



ಚಿತ್ರ 39

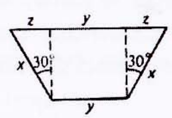
ಗರಿಷ್ಠ ಅಡ್ಡಛೇದದ ತೊಟ್ಟಿ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಆಯತಾಕಾರದ ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯನ್ನು (ಚಿತ್ರ 37) ತೊಟ್ಟಿಯಾಕಾರಕ್ಕೆ ಬಗ್ಗಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ ತೊಟ್ಟಿಯ ಅಡ್ಡಛೇದವು ಸಮಾಂತರ ಟ್ರೆಪೀಜಿಯಂ* ಆಕಾರದಲ್ಲಿರಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ, ಚಿತ್ರ 38 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ, ಅನೇಕ ಆಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಹಾಳೆಯನ್ನು ಬಾಗಿಸಬಹುದು. ಈ ತೊಟ್ಟಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಇದರ ಬದಿಗಳ ಅಗಲ ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ಅವನ್ನು ಯಾವ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಬಾಗಿಸಬೇಕು (ಚಿತ್ರ 39) ?

ಉತ್ತರ :

ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ಅಗಲ l ಎಂದಿರಲಿ. ತೊಟ್ಟಿಯ ಬಾಗಿದ ಬದಿಗಳ ಅಗಲವನ್ನು x ಮತ್ತು ತಳದ ಅಗಲವನ್ನು y ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಇನ್ನೊಂದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಪದ z ಎಂಬುದನ್ನೂ ಬಳಸೋಣ; ಇದರ ಅರ್ಥ ಚಿತ್ರ 40 ರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 40

* ಟ್ರೆಪೀಜಿಯಂ = ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಆಕಾರ. ಇದರ ನಾಲ್ಕೂ ಬಾಹುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದು, ಇನ್ನೆರಡು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. – *ಸಂಪಾದಕರು*

ತೊಟ್ಟಿಯ ಅಡ್ಡಛೇದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಟ್ರೆಪೀಜಿಯಂನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ :

$$S=\frac{(z+y+z)+y}{2}\sqrt{x^2-z^2}=\sqrt{(y+z)^2(x^2-z^2)}\,.$$

x, y, z ಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ S ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಿದರೆ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ ಸಿಗುತ್ತದೆ; ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯ ಅಗಲವಾದ $2x+y$ ಮೊತ್ತವು l ಎಂಬ ಸ್ಥಿರ ಬೆಲೆ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆಂದು ಗಮನಿಸಿ. ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳ ಮೂಲಕ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿ ಹೀಗೆ ಬರೆಯೋಣ :

$$S^2=(y+z)^2(x+z)(x-z).$$

x, y, z ಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ S^2 ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೋ ಅದೇ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $3S^2$ ಕೂಡ, ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ $3S^2$ ಅನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು :

$$(y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z).$$

ಈ ನಾಲ್ಕು ಗುಣಕಗಳ ಮೊತ್ತ :

$$y+z+y+z+x+z+3x-3z=2y+4x=2l,$$

ಈ ಮೊತ್ತವು ಸ್ಥಿರವಾದ್ದರಿಂದ, ನಾಲ್ಕು ಗುಣಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕಾರ,

$$y+z=x+z \text{ ಮತ್ತು } x+z=3x-3z.$$

ಮೊದಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರಕಾರ,

$$y=x,$$

ಈಗ, $y+2x=l$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $x=y={}^{l}/_{3}$. ಎರಡನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರಕಾರ,

$$z=\frac{x}{2}=\frac{l}{6}.$$

ಚಿತ್ರ 30ರ ಪ್ರಕಾರ, z ಭಾಗವು ವಿಕರ್ಣ xನ ಅರೆವಾಸಿಯಾದ್ದರಿಂದ, z ಗೆ ಎದುರಾಗಿರುವ ಕೋನ 30°. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ತೊಟ್ಟಿಯ ಬದಿಗಳು ತಳದಿಂದ 90° + 30° = 120° ಕೋನದಲ್ಲಿ ಹೊರಕ್ಕೆ ಬಾಗಿರಬೇಕು.

ಈ ವಿವರಣೆಯ ಸಾರಾಂಶ : ಸಮ ಷಟ್ಕೋನದ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಬಾಹುಗಳ ಆಕಾರದಲ್ಲಿ ತೊಟ್ಟಿಯ ಬದಿಗಳನ್ನು ಬಾಗಿಸಿದಾಗ, ಅದರ ಕರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ.

ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರದ ಆಲಿಕೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಲೋಹದ ಹಾಳೆಯಿಂದ ಆಲಿಕೆಯ ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ, ವೃತ್ತಖಂಡವೊಂದನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದು, ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಶಂಕುವಾಗಿ ತಿರುಚಬೇಕು (ಚಿತ್ರ 41 ನೋಡಿ). ಈ ಶಂಕುವಿನ ಗಾತ್ರ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆಯುವ ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ಕಂಸವು (ವೃತ್ತದ 360° ಗಳಲ್ಲಿ) ಎಷ್ಟು ಡಿಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬೇಕು ?

ಉತ್ತರ :

ಶಂಕುವಾಗಿ ತಿರುಚುವ ವೃತ್ತಭಾಗದ ಕಂಸದ ಉದ್ದ x ಎಂದಿರಲಿ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಲೋಹದ ತಟ್ಟೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯ R ಶಂಕುವಿನ ಶೃಂಗಾಂತರವಾಗುತ್ತದೆ; x ಶಂಕುವಿನ ತಳ ವೃತ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

$2\pi r = x$ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ,

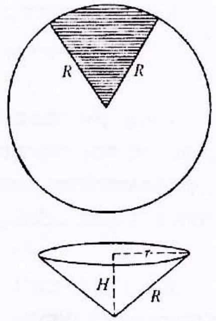
$$r = \frac{x}{2\pi}.$$

ಪೈಥಾಗೋರಸನ ಪ್ರಮೇಯದ ಅನುಸಾರ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ (ಚಿತ್ರ 41 ನೋಡಿ) :

$$H=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4\pi^2}}$$

ಶಂಕುವಿನ ಗಾತ್ರ ಸೂಚಿಸುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4\pi^2}}.$$



ಚಿತ್ರ 41

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಬೆಲೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಕ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕು :

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

ಅಥವಾ ಇದರ ವರ್ಗ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕು:

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4\left[R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right]$$

ಈಗ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಮೊತ್ತವು ಸ್ಥಿರ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = R^2$$

(ಅಂದರೆ ಇಲ್ಲಿ ವಿವಿಧ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಬೀಜಪದಗಳಾವುವೂ ಇಲ್ಲ)

ಆದ್ದರಿಂದ (ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುವುದು ಯಾವಾಗ ? ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಸಾಧಿಸಿದ ತರ್ಕದ ಆಧಾರದಿಂದ), ಈ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಬೆಲೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ x ನ ಬೆಲೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರಬೇಕು :

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \div \left[R^2-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] = 2 \div 1$$

ಇದರಿಂದ,

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 - 2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2,$$

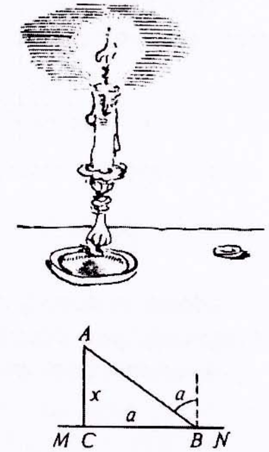
$$3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 \text{ ಮತ್ತು } x = \frac{2\pi}{3}R\sqrt{6} \approx 5.15R.$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಕಂಸ $x \approx 295°$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕತ್ತರಿಸಿ ತೆಗೆದ ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ಕಂಸವು ಸುಮಾರು 65° ಹೊಂದಿರಲೇಬೇಕು.

ಅತ್ಯಂತ ಉಜ್ವಲ ಪ್ರಕಾಶ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಮೇಜಿನಲ್ಲಿ ಉರಿಯುತ್ತಿರುವ ಮೊಂಬತ್ತಿಯಿದೆ (ಚಿತ್ರ 42). ಮೇಜಿನಲ್ಲಿರುವ ನಾಣ್ಯದ ಮೇಲೆ ಅತ್ಯಂತ ಉಜ್ವಲ ಪ್ರಕಾಶ ಬೀಳಬೇಕಾದರೆ, ಮೊಂಬತ್ತಿಯ ಜ್ವಾಲೆಯು ಮೇಜಿನಿಂದ ಎಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರಬೇಕು ?



ಚಿತ್ರ 42

ಉತ್ತರ :

ಜ್ವಾಲೆಯು ಕೆಳಮಟ್ಟಕ್ಕಿದ್ದಷ್ಟೂ ಅದರ ಪ್ರಕಾಶ ಉಜ್ವಲ ವಾಗುತ್ತದೆ ಅನಿಸಬಹುದು. ಈ ಅಭಿಪ್ರಾಯ ಸರಿಯಲ್ಲ: ಜ್ವಾಲೆಯು ಕೆಳಮಟ್ಟದಲ್ಲಿದ್ದ ಅದರ ಕಿರಣಗಳು ತೀರಾ ಇಳಿಜಾರಾದ ಕೋನದಲ್ಲಿ ಪಸರಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ಮೊಂಬತ್ತಿ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಕಿರಣಗಳು ತೀರಾ ಲಘುಕೋನದಲ್ಲಿ ಪಸರಿಸುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ ಬೆಳಕಿನ ಮೂಲದ ಅಂತರ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅತ್ಯಂತ ಉಜ್ವಲ ಪ್ರಕಾಶವು ಇವೆರಡರ ನಡುವಣ ಮಟ್ಟದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ವಾಲೆಯಿಂದ ಒದಗುತ್ತದೆ. ಈ ಎತ್ತರ x ಎಂದಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 42). ಮೊಂಬತ್ತಿಯ ಜ್ವಾಲೆಯ ಮೂಲಕ ಹಾಯುವ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಬುಡ Cಯಿಂದ ನಾಣ್ಯ Bಯ ಅಂತರ BCಯನ್ನು a ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಜ್ವಾಲೆಯ ಉಜ್ವಲತೆ i ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ, ಪ್ರಕಾಶ ವಿಜ್ಞಾನದ ನಿಯಮಗಳ ಪ್ರಕಾರ, ನಾಣ್ಯದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವ ಪ್ರಕಾಶವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$\frac{i}{AB^2}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^2} = \frac{i\cos\alpha}{a^2+x^2},$$

ಇಲ್ಲಿ α ಎಂಬುದು AB ಕಿರಣ ಪುಂಜವು ನಾಣ್ಯದ ಮೇಲೆ ಬೀಳುವಾಗಿನ ಕೋನ. ಈಗ,

$$\cos\alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಜ್ವಾಲೆಯ ಉಜ್ವಲತೆ :

$$\frac{i}{a^2+x^2} \times \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{ix}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಈ ಪರಿಮಾಣ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೋ, ಅದೇ ಬೆಲೆಗೆ ಇದರ ವರ್ಗವೂ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ವರ್ಗ :

$$\frac{i^2x^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

ಇಲ್ಲಿ i^2 ಸ್ಥಿರವಾದ್ದರಿಂದ (ಮೊಂಬತ್ತಿಯ ಪ್ರಕಾಶವು ಸ್ಥಿರ) ಅದನ್ನು ಕಳಚೋಣ. ಈ ಪರಿಮಾಣದ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಯಿಸೋಣ :

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right).$$

ಈ ರೂಪಾಂತರಿತ ಪರಿಮಾಣವು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಮಾಣದೊಂದಿಗೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ :

$$\left(\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)$$

ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ಸೇರಿಸಿದ a^4 ಸ್ಥಿರಾಂಶವು, x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುವುದೋ ಆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಈ ಗುಣಕಗಳ, ಪ್ರಥಮ ಘಾತಗಳ ಮೊತ್ತವು ಸ್ಥಿರ :

$$\frac{a^2}{x^2+a^2}+\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)=1,$$

ಆದ್ದರಿಂದ (ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುವುದು ಯಾವಾಗ ? ಎಂಬ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸುವಾಗ ಸಾಧಿಸಿದ ತರ್ಕದ ಆಧಾರದಿಂದ). ಮೇಲಿನ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಗುಣಕಗಳು ಈ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರಬೇಕು :

$$\frac{a^2}{x^2+a^2} \div \left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = 2 \div 1$$

ಇದರ ಆಧಾರದಿಂದ ದೊರಕುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$a^2 = 2x^2+2a^2-2a^2.$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ,

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0.71\,a\,.$$

ಉರಿಯುವ ಮೊಂಬತ್ತಿಯ ಬುಡದಿಂದ ನಾಣ್ಯಕ್ಕಿರುವ ದೂರದ 0.71ರಷ್ಟು ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಜ್ವಾಲೆ (ಬೆಳಕಿನ ಮೂಲ) ಇರುವಾಗ, ನಾಣ್ಯದ ಮೇಲೆ ಅತ್ಯಂತ ಉಜ್ವಲ ಪ್ರಕಾಶ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಬಂಧ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, ನಿಮ್ಮ ಕೆಲಸದ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಸೂಕ್ತ ಬೆಳಕಿನ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಮಾಡಬಹುದು. ■

ಅಧ್ಯಾಯ – ಎಂಟು

ಕ್ರಮಾಗತ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಕ್ರಮಾಗತ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಂಖ್ಯಾಸರಣಿಯ ಅತಿ ಪ್ರಾಚೀನ ಸಮಸ್ಯೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಚದುರಂಗವನ್ನು ಶೋಧಿಸಿದವನಿಗೆ ಬಹುಮಾನವನ್ನು ನೀಡುವ ಸಮಸ್ಯೆ ಎರಡು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳಷ್ಟು ಹಳೆಯದು. ಆದರೂ ಇದು ಕ್ರಮಾಗತ ಶ್ರೇಢಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯ ಬಗೆಗಿನ ಅತ್ಯಂತ ಹಳೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲ. ಇದಕ್ಕಿಂತಲೂ ಪ್ರಾಚೀನ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದಿದೆ – ಬ್ರೆಡ್ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆ. ಈಜಿಪ್ಟಿನ ಖ್ಯಾತ ರ್‍ಹಿಂಡ್ ಪಪೈರಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಈ ಸಮಸ್ಯೆ ದಾಖಲಾಗಿದೆ. ಕಳೆದ ಶತಮಾನದ ಕೊನೆಯ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ರ್‍ಹಿಂಡ್ ಎಂಬವನು ಸಂಶೋಧಿಸಿದ ಈ ಪಪೈರಸ್ ಅನ್ನು ಕ್ರಿ. ಪೂ. 2000ದ ಸುಮಾರಿನಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಯಿತು. ಬಹುಶಃ ಮೂರು ಸಾವಿರ ವರ್ಷಗಳಷ್ಟು ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಾಚೀನ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವೊಂದರಿಂದ ಆಯ್ದ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಈ ಪಪೈರಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತ, ಬೀಜಗಣಿತ ಹಾಗೂ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲೊಂದರ ಮುಕ್ತ ಅನುವಾದವನ್ನು ಮುಂದೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ :

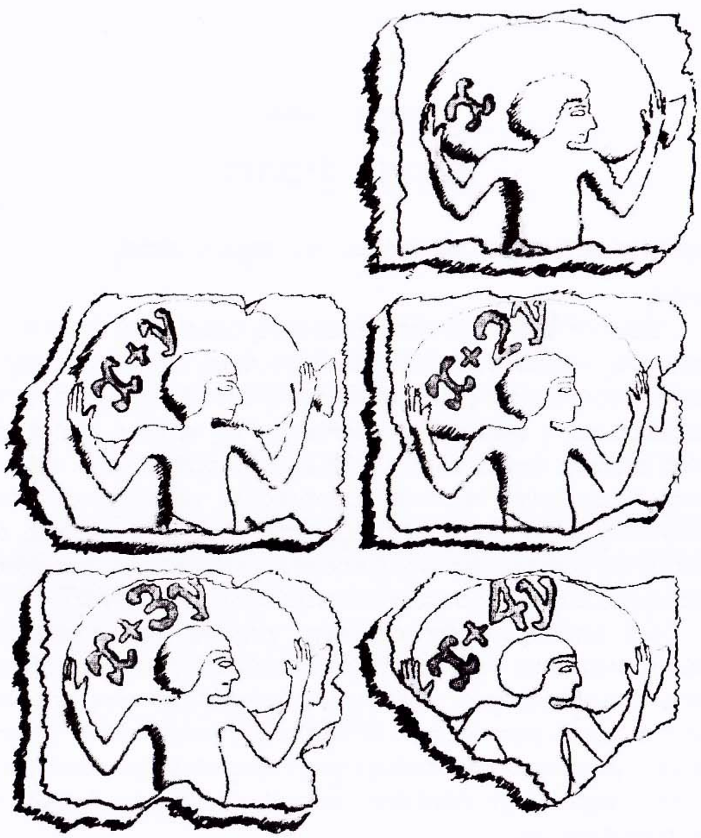
ಐದು ಜನರಿಗೆ ನೂರು ಬ್ರೆಡ್ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಹಂಚಬೇಕು. ಆಗ ಎರಡನೆಯವನು ಮೊದಲನೆಯವನಿಗಿಂತ ಮೂರನೆಯವನು ಎರಡನೆಯವನಿಗಿಂತ, ನಾಲ್ಕನೆಯವನು ಮೂರನೆಯವನಿಗಿಂತ, ಮತ್ತು ಐದನೆಯವನು ನಾಲ್ಕನೆಯವನಿಗಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಪಡೆಯುವ ಬ್ರೆಡ್ ತುಂಡುಗಳು (ಬ್ರೆಡ್ ತುಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹೆಚ್ಚಳ) ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. ಅದಲ್ಲದೆ, ಕೊನೆಯ ಮೂವರು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಪಡೆಯುವುದಕ್ಕಿಂತ 7 ಪಟ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಬ್ರೆಡ್ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಮೊದಲ ಇಬ್ಬರು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಪಡೆಯಬೇಕು. ಹಾಗಾದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬನಿಗೂ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಬ್ರೆಡ್ ತುಂಡುಗಳು ಎಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ :

ನೂರು ಬ್ರೆಡ್ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಐವರಿಗೆ ಹಂಚುವಾಗ ಅವರು ಪಡೆಯುವ ಬ್ರೆಡ್ ತುಂಡುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂಕಗಣಿತೀಯ ಕ್ರಮಾಗತ ಶ್ರೇಢಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಸರಣಿಯ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ x ಮತ್ತು ಇದಕ್ಕೂ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ y ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ,

ಮೊದಲನೆಯವನ ಪಾಲು x
ಎರಡನೆಯವನ ಪಾಲು .... $x+y$
ಮೂರನೆಯವನ ಪಾಲು .... $x+2y$
ನಾಲ್ಕನೆಯವನ ಪಾಲು .... $x+3y$
ಐದನೆಯವನ ಪಾಲು .... $x+4y$



ಚಿತ್ರ 43

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ಷರತ್ತುಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ :

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100, \\ 7[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y). \end{cases}$$

ಮೊದಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$x+2y=20,$$

ಎರಡನೆಯದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ,

$$11x=2y.$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಉತ್ತರಗಳು :

$$x=1\frac{2}{3}, \ y = 9\frac{1}{6}.$$

ಆದ್ದರಿಂದ 100 ಬ್ರೆಡ್ ತುಂಡುಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪಾಲುಗಳಾಗಿ ಹಂಚಬೇಕು :

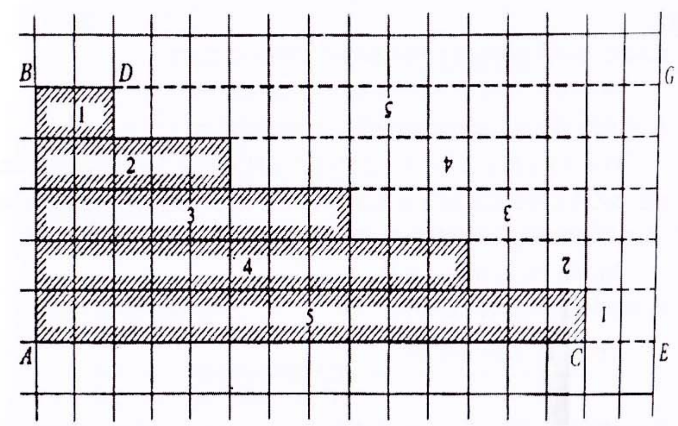
$$1\frac{2}{3}, \quad 10\frac{5}{6}, \quad 20, \quad 29\frac{1}{6}, \quad 38\frac{1}{3}.$$

ಚೌಕಳಿ ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತ

ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಗಳು ಕಳೆದ 50 ಶತಮಾನಗಳಿಂದ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿದ್ದರೂ ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಅವು ಇತ್ತೀಚೆಗೆ ಪ್ರವೇಶ ಪಡೆದವು. ಇನ್ನೂರು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಪ್ರಕಟವಾಗಿ, ಸುಮಾರು ಅರ್ಧ ಶತಮಾನದ ಅವಧಿಗೆ ಅಧಿಕೃತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವಾಗಿದ್ದ ಮ್ಯಾಗ್ನಿತ್‌ಸ್ಕಿಯ ರಷ್ಯನ್ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಅದರಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಗಳಿವೆ. ಆದರೆ, ಈ ಸರಣಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅದರಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿಲ್ಲ. ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಗಳ ಬಗೆಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಕಬ್ಬಿಣದ ಕಡಲೆ ಎಂಬ ಭಾವನೆ ಹಲವರಲ್ಲಿದೆ. ಆದರೆ ಅಂಕ ಗಣಿತೀಯ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ಇರುವ ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ನೀಡುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಚೌಕಳಿ ಕಾಗದದ ನೆರವಿನಿಂದ ಇದನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಚಿತ್ರಮಯವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು. ಅಂತಹ ಕಾಗದದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಅಂಕಗಣಿತೀಯ ಸರಣಿಯನ್ನು ಮೆಟ್ಟಲು ರಚನೆಯ ಚಿತ್ರವಾಗಿ ರೂಪಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚಿತ್ರ 44 ರಲ್ಲಿರುವ ABDC ಚಿತ್ರವು ಈ ಸಂಖ್ಯಾಸರಣಿಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆ :

2, 5, 8, 11, 14.

ಈ ಸರಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಚಿತ್ರವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ABGE ಎಂಬ



ಚಿತ್ರ 44

ಆಯತವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಿ. ಈಗ ನಮಗೆ ABDC ಮತ್ತು DGEC ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮಾನ ಆಕೃತಿಗಳು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೂ ಈ ಸರಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ABGE ಆಯತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಆ ಮೊತ್ತದ ಇಮ್ಮಡಿ. ABGEಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ :

$$(AC+CE) \times AB.$$

ಇಲ್ಲಿ $AC+CE$ ಎಂಬುದು ಸರಣಿಯ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಐದನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ; AB ಎಂಬುದು ಸರಣಿಯ ಸದಸ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಸರಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ಇಮ್ಮಡಿ :

2S = (ಸರಣಿಯ ಎರಡು ತುದಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ) x (ಸರಣಿಯ ಸದಸ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು)

ಅಥವಾ,

$$S = \frac{(\text{ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ} + \text{ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ}) \times (\text{ಸದಸ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು})}{2}.$$

ತೋಟಕ್ಕೆ ನೀರೆರೆಯುವುದು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಒಂದು ತೋಟದಲ್ಲಿ 30 ಸಾಲುಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲು 16 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದ ಮತ್ತು 2.5 ಮೀಟರ್ ಅಗಲವಿದೆ. ತೋಟಗಾರನು 14 ಮೀಟರ್ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಾವಿಯಿಂದ ಕೊಡದಲ್ಲಿ ನೀರು ಸೇದಿ ತಂದು, ಸಾಲುಗಳ ನಡುವೆ ನಡೆದು, ತೋಟಕ್ಕೆ ನೀರು ಎರೆಯುತ್ತಾನೆ. ಬಾವಿಯಿಂದ ಒಮ್ಮೆ ಸೇದಿ ತಂದ ನೀರು ಒಂದು ಸಾಲಿಗೆ ಎರೆಯಲು ಸಾಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಇಡೀ ತೋಟಕ್ಕೆ ನೀರೆರೆಯುವಾಗ ತೋಟಗಾರ ಎಷ್ಟು ದೂರ ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ ? ಅವನ ನಡೆದಾಟವು ಬಾವಿಯಿಂದ ಆರಂಭವಾಗಿ ಅಲ್ಲಿಯೇ ಮುಗಿಯುತ್ತದೆ.

ಉತ್ತರ :

ಮೊದಲ ಸಾಲಿಗೆ ನೀರೆರೆಯಲು ತೋಟಗಾರ ನಡೆಯುವ ದೂರ :

$14 + 16 + 2.5 + 16 + 2.5 + 14 = 65$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು.

ಎರಡನೆಯ ಸಾಲಿಗೆ ನೀರೆರೆಯಲು ಅವನು ನಡೆಯುವ ದೂರ :

$14 + 2.5 + 16 + 2.5 + 16 + 2.5 + 2.5 + 14 = 65 + 5 = 70$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು.

ಪ್ರತಿ ಸಾಲಿಗೆ ನೀರೆರೆಯುವಾಗಲೂ ಹಿಂದಿನ ಸಾಲಿಗೆ ನೀರೆರೆಯುವಾಗ ನಡೆದುದಕ್ಕಿಂತ ಐದು ಮೀಟರುಗಳು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ನಡೆಯಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಇಲ್ಲಿ ದೊರಕುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿ :

$65, 70, 75, ...; 65 + 5 \times 29.$

ಈ ಸರಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ :

$$\frac{(65 + 65 + 29 \times 5)\ 30}{2} = 4125 \text{ ಮೀಟರ್‌ಗಳು.}$$

ತೋಟಗಾರನು ತನ್ನ ತೋಟಕ್ಕೆ ನೀರೆರೆಯುವಾಗ 4.125 ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ಗಳು ನಡೆಯುತ್ತಾನೆ.

ಕೋಳಿಮರಿಗಳಿಗೆ ಆಹಾರ ನೀಡುವುದು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಿಮಾಣದ ಆಹಾರವನ್ನು 31 ಕೋಳಿಮರಿಗಳಿಗಾಗಿ ಶೇಖರಿಸಿಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕೋಳಿಮರಿಗೂ ಪ್ರತಿವಾರ ಒಂದು ಡೆಕಾಲೀಟರ್ (10 ಲೀಟರ್‌ಗಳು) ಆಹಾರ ನೀಡಬೇಕು. ಕೋಳಿಮರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಬದಲಾಗದೆಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಆದರೆ ಪ್ರತಿವಾರವೂ ಒಂದೊಂದು ಕೋಳಿಮರಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಬಂತು. ಹಾಗಾಗಿ ಶೇಖರಿಸಿಟ್ಟಿದ್ದ ಆಹಾರವು ನಿರೀಕ್ಷಿತ ಅವಧಿಯ ಇಮ್ಮಡಿ ಅವಧಿಗೆ ಸಾಕಾಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಶೇಖರಿಸಿಟ್ಟಿದ್ದ ಆಹಾರವೆಷ್ಟು ? ಅದು ಎಷ್ಟು ವಾರಗಳ ಅವಧಿಗೆ ಸಾಕಾಗುವುದೆಂದು ಯೋಜಿಸಲಾಗಿತ್ತು ?

ಉತ್ತರ :

x ಡೆಕಾಲೀಟರ್ ಆಹಾರವನ್ನು y ವಾರಗಳಿಗಾಗಿ ಶೇಖರಿಸಲಾಗಿತ್ತು ಎಂದಿರಲಿ. ಪ್ರತಿ ಕೋಳಿ ಮರಿಗೂ ವಾರವೊಂದಕ್ಕೆ 1 ಡೆಕಾಲೀಟರ್‌ನಂತೆ 31 ಕೋಳಿಮರಿಗಳಿಗೆ ಈ ಆಹಾರ ಸಾಕಾಗುವಷ್ಟಿತ್ತು. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$x = 31y.$$

ಮೊದಲ ವಾರ 31 ಡೆಕಾಲೀಟರ್ ಆಹಾರ ಖರ್ಚಾಗುವುದು. ಎರಡನೆಯ ವಾರ 30, ಮೂರನೆಯ ವಾರ 29, ಹಾಗೆಯೇ ಕೊನೆಯ ವಾರದವರೆಗೆ ಆಹಾರ ಖರ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುವುದು. ಈ ಅವಧಿಯು ಯೋಜಿತ ಅವಧಿಯ ಇಮ್ಮಡಿಯಾಗಿದೆ. ಕೊನೆಯ ವಾರದಲ್ಲಿ ಬಳಸಲಾದ ಆಧಾರದ ಪರಿಮಾಣ :

$(31-2y+1)$ ಡೆಕಾಲೀಟರ್‌ಗಳು*

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಶೇಖರಿಸಿಟ್ಟಿದ್ದ ಆಹಾರವು :

$$x = 31y = 31 + 30 + 29 + ... + (31-2y+1).$$

ಈ ಸರಣಿಯ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ 31 ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ $(31-2y+1)$. ಇದರ 2y ಸದಸ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ :

$$31y = \frac{(31+31-2y+1)2y}{2} = (63-2y)\,y.$$

ಇಲ್ಲಿ y ಎಂಬುದು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇಡೀ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು y ಇಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು. ಆಗ ದೊರಕುವ ಉತ್ತರ :

$31 = 63 - 2y$ ಮತ್ತು $y = 16$,

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$x = 31y = 496.$$

---

* ವಾರ ವಾರದ ಲೆಕ್ಕ ಹೀಗಿದೆ :
1ನೇ ವಾರ 31 ಡೆಕಾಲೀಟರ್‌ಗಳು,
2ನೇ ವಾರ 31–1 ಡೆಕಾಲೀಟರ್‌ಗಳು,
3ನೇ ವಾರ 31–2 ಡೆಕಾಲೀಟರ್‌ಗಳು,
....
2y ನೇ ವಾರ $31-(2y-1) = 31-2y+1$ ಡೆಕಾಲೀಟರ್‌ಗಳು.

ಆರಂಭದಲ್ಲಿ 496 ಡೆಕಾಲೀಟರ್‌ಗಳಷ್ಟು ಆಹಾರ ಶೇಖರಿಸಿಡಲಾಗಿತ್ತು. ಇದು 16 ವಾರಗಳಿಗೆ ಸಾಕಾಗುವುದೆಂದು ಯೋಜಿಸಲಾಗಿತ್ತು.

ಅಗೆಯುವವರ ತಂಡ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ಹಿರಿಯ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಾಲೆಯ ಬಯಲಿನಲ್ಲಿ ಹೊಂಡವೊಂದನ್ನು ಅಗೆಯಲು ತಯಾರಾದರು. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಅಗೆಯುವವರ ತಂಡ ರಚಿಸಿದರು. ಈ ತಂಡದ ಎಲ್ಲ ಸದಸ್ಯರೂ ಒಮ್ಮೆಲೇ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ತೊಡಗಿದ್ದರೆ ಹೊಂಡ ಅಗೆಯುವ ಕೆಲಸ 24 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಯುತ್ತಿತ್ತು. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಕೆಲಸ ಆರಂಭಿಸಿದವನು ಒಬ್ಬನೇ ಒಬ್ಬ. ಸ್ವಲ್ಪ ಸಮಯದ ನಂತರ ಅವನ ಜೊತೆಗೆ ಇನ್ನೊಬ್ಬ ಸೇರಿದ. ಮತ್ತೆ ಅಷ್ಟೇ ಸಮಯ ಕಳೆದ ಬಳಿಕ ಅವರಿಬ್ಬರ ಜೊತೆಗೆ ಮತ್ತೊಬ್ಬ ಸೇರಿದ. ಅನಂತರ ನಾಲ್ಕನೆಯವನು ಸೇರಿದ. ಹಾಗೆಯೇ ಒಬ್ಬೊಬ್ಬರಾಗಿ ಸೇರಿಕೊಂಡು ಕೊನೆಯವನೂ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ತೊಡಗಿದ. ಎಲ್ಲ ಕೆಲಸ ಮುಗಿದ ಬಳಿಕ, ಮೊದಲು ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ತೊಡಗಿದವನು ತಂಡಕ್ಕೆ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಂದು ಸೇರಿದವನಿಗಿಂತ 11 ಪಟ್ಟು ಜಾಸ್ತಿ ಅವಧಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದನೆಂದು ತಿಳಿಯಿತು. ಹಾಗಾದರೆ ಕೊನೆಯ ಹುಡುಗ ಎಷ್ಟು ಸಮಯ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ್ದ ?

ಉತ್ತರ :

ಕೊನೆಯವನು x ಗಂಟೆ ಅಗೆದನೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲನೆಯವನು $11x$ ಗಂಟೆ ಅಗೆದನೆಂದಾಯ್ತು. ಹೊಂಡ ಅಗೆದವರ ಸಂಖ್ಯೆ y ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ ಎಲ್ಲರೂ ದುಡಿದ ಗಂಟೆಗಳು ಅವರೋಹಣ ಕ್ರಮದ ಸಂಖ್ಯೆ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿವೆ. ಈ ಸರಣಿಯ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ $11x$ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ x. ಈ ಸರಣಿಯ y ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ತಂಡದವರೆಲ್ಲ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ ಒಟ್ಟು ಗಂಟೆಗಳು :

$$\frac{(11x+x)\mathrm{y}}{2} = 6x\mathrm{y}.$$

ಆದರೆ ತಂಡದ y ಸದಸ್ಯರು ಒಟ್ಟಾಗಿ ದುಡಿದಿದ್ದರೆ, 24 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಹೊಂಡ ಅಗೆದು ಮುಗಿಸಬಹುದಿತ್ತು ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ ಹೊಂಡ ಅಗೆಯಲು 24y ಕೆಲಸದ ಗಂಟೆಗಳು ಅವಶ್ಯ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$6x\mathrm{y} = 24\mathrm{y}.$$

ಇಲ್ಲಿ y ಎಂಬುದು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲ, ಆದ್ದರಿಂದ y ಅನ್ನು ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಿಂದ ಕಳಚಬಹುದು. ಈಗ,

$$6x = 24$$

ಹಾಗಾಗಿ,

$$x = 4.$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ತಂಡಕ್ಕೆ ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಬಂದು ಸೇರಿದವನು ದುಡಿದದ್ದು ಕೇವಲ 4 ಗಂಟೆಗಳು.

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿದೆವು. ಆದರೆ, ಈ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದ ತಂಡದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜನರಿದ್ದರು ? ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನಿಸಿದರೆ ಉತ್ತರ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿರಲಿಲ್ಲ. ಆ ತಂಡದಲ್ಲಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿದವರ ಸಂಖ್ಯೆ (y)ಯನ್ನು ಬಳಸಿಯೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದರೂ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ yಯ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅಗತ್ಯವಾದ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಒದಗಿಸಿಲ್ಲ.

ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಸೇಬಿನ ತೋಟವೊಂದರ ಮಾಲೀಕನೊಬ್ಬ ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳನ್ನು ಮಾರುತ್ತಿದ್ದ. ಮೊದಲ ಗಿರಾಕಿಗೆ ಒಟ್ಟು ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಅರ್ಧಭಾಗ ಹಾಗೂ ಹಣ್ಣೊಂದರ ಅರ್ಧ ತುಂಡನ್ನು ಮಾರಿದ. ಎರಡನೆಯ ಗಿರಾಕಿಗೆ ಉಳಿದ ಹಣ್ಣುಗಳ ಅರ್ಧಭಾಗ ಹಾಗೂ ಹಣ್ಣೊಂದರ ಅರ್ಧ ತುಂಡು ಮಾರಿದ. ಮೂರನೆಯವನಿಗೆ ಉಳಿದದ್ದರ ಅರ್ಧ ಭಾಗ ಹಾಗೂ ಹಣ್ಣೊಂದರ ಅರ್ಧ ತುಂಡು ಮಾರಿದ. ಇದೇ ರೀತಿ ಆತನ ಮಾರಾಟ ಮುಂದುವರಿಸಿದ. ಏಳನೆಯ ಗಿರಾಕಿಗೆ ತನ್ನಲ್ಲಿ ಉಳಿದದ್ದರ ಅರ್ಧಭಾಗವನ್ನೂ ಜೊತೆಗೆ ಅರ್ಧ ಹಣ್ಣನ್ನೂ ಮಾರಿದ. ಆಗ ಅವನ ಬಳಿಯಿದ್ದ ಹಣ್ಣುಗಳು ಮುಗಿದವು. ಹಾಗಾದರೆ ಅವನ ಬಳಿಯಿದ್ದ ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು ಎಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ :

ಅವನ ಬಳಿಯಿದ್ದ ಸೇಬಿನ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ x ಎಂದಿರಲಿ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ, ಮೊದಲನೆಯವನು ಪಡೆದ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ :

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2},$$

ಎರಡನೆಯ ಗಿರಾಕಿ ಪಡೆದ ಹಣ್ಣುಗಳು :

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2},$$

ಮೂರನೆಯ ಗಿರಾಕಿ ಪಡೆದ ಹಣ್ಣುಗಳು :

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{4}\right)+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3},$$

ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಸಿದರೆ ಏಳನೆಯ ಗಿರಾಕಿ ಪಡೆದ ಹಣ್ಣುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ :

$$\frac{x+1}{2^7}.$$

ಈಗ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣ :

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\frac{x+1}{2^3}+\ldots+\frac{x+1}{2^7}=x$$

ಅಥವಾ,

$$(x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\frac{1}{2^7}\right)=x.$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಆವರಣದಲ್ಲಿರುವ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{2^7}$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಉತ್ತರ :

$$x=2^7-1=127.$$

ತೋಟದ ಮಾಲೀಕನ ಬಳಿ 127 ಸೇಬು ಹಣ್ಣುಗಳು ಇದ್ದವು.

ಕುದುರೆಯ ಖರೀದಿ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಮ್ಯಾಗ್ನಿತ್‌ಸ್ಕಿಯ ಹಳೆಯ ರಷ್ಯನ್ ಅಂಕಗಣಿತದ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಮೋಜಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದಿದೆ. ಅದರ ಅನುವಾದ ಮುಂದಿದೆ :

ಒಬ್ಬನು ಕುದುರೆಯೊಂದನ್ನು 156 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗೆ ಮಾರಿದ. ಆದರೆ ಖರೀದಿಸಿದವನು ಕುದುರೆಯನ್ನು ಒಯ್ಯಲಿಲ್ಲ. ಅದನ್ನು ಮಾಲೀಕನಿಗೇ ಹಿಂತಿರುಗಿಸುತ್ತಾ ಆತ ಹೇಳಿದ :

"ಇಷ್ಟೊಂದು ಬೆಲೆ ತೆತ್ತು ಇದನ್ನು ಒಯ್ಯಲಾರೆ. ಇದು ಅಷ್ಟು ಬೆಲೆ ಬಾಳುವ ಪ್ರಾಣಿಯಲ್ಲ."

ಆಗ ಮಾಲೀಕ ಈ ರೀತಿ ಸಲಹೆ ನೀಡಿದ :

"ನನ್ನ ಕುದುರೆಯ ಬೆಲೆ ಬಹಳ ಜಾಸ್ತಿ ಅನಿಸಿದರೆ, ನೀನು ಅದರ ಲಾಳದ ಮೊಳೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಬೆಲೆ ತೆತ್ತು ಕೊಂಡುಕೋ. ಆಗ ಕುದುರೆಯನ್ನು ನಾನು ಪುಕ್ಕಟೆಯಾಗಿ ಕೊಡುವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಲಾಳದಲ್ಲೂ ಆರು ಮೊಳೆಗಳಿವೆ. ಮೊದಲ ಮೊಳೆಗೆ ಕೇವಲ $^1/_4$ ಪೈಸೆ ಕೊಡು; ಎರಡನೆಯದಕ್ಕೆ $^1/_2$ ಪೈಸೆ, ಮೂರನೆಯದಕ್ಕೆ 1 ಪೈಸೆ – ಹೀಗೆ ಹಣಕೊಟ್ಟು ಮೊಳೆಗಳನ್ನು ಕೊಂಡರಾಯಿತು."

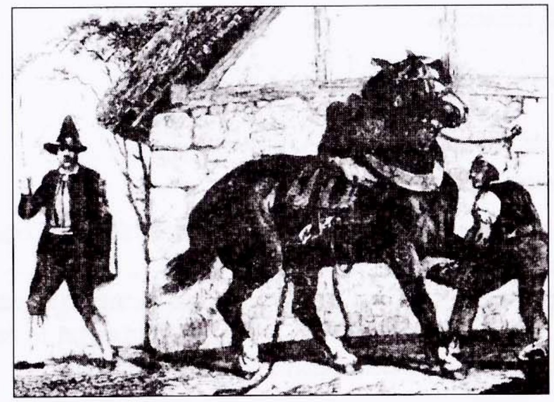
ಈ ಅಗ್ಗದ ಬೆಲೆ ಕೇಳಿ ಗಿರಾಕಿಗೆ ಭಾರಿ ಖುಷಿಯಾಯಿತು. ಕುದುರೆಯನ್ನು ಪುಕ್ಕಟೆಯಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ಆತ ಮಾಲೀಕನ ಷರತ್ತುಗಳಿಗೆ ಒಪ್ಪಿದ. ಮಾಲೀಕನಿಗೆ ಒಟ್ಟಾಗಿ 10 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾಗುವುದಿಲ್ಲವೆಂದು ಅವನು ಯೋಚಿಸಿದ.

ಈ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಗಿರಾಕಿಗೆ ಎಷ್ಟು ನಷ್ಟವಾಯಿತು ?

ಉತ್ತರ :

ನಾಲ್ಕು ಲಾಳಗಳ 24 ಮೊಳೆಗಳಿಗೆ ಗಿರಾಕಿ ತೆರಬೇಕಾದ ಹಣ :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{24-3}$$ ಪೈಸೆಗಳು.



ಚಿತ್ರ 45

ಅಂದರೆ,

$$\frac{2^{21}\times 2-{}^1/_4}{2-1}=2^{22}-\frac{1}{4}=4194303\ \frac{3}{4}$$ ಪೈಸೆಗಳು

ಅಥವಾ ಸುಮಾರು 42 000 ರೂಪಾಯಿಗಳು. ಮೊಳೆಗಳಿಗೆ ಇಷ್ಟು ಬೆಲೆ ಸಿಕ್ಕರೆ ಕುದುರೆಯನ್ನು ಪುಕ್ಕಟೆಯಾಗಿ ಕೊಡಲು ಚಿಂತಿಸಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ.

ಸೈನಿಕನ ಗಾಯಗಳಿಗೆ ಸಂಭಾವನೆ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಹಳೆಯ ರಷ್ಯನ್ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕವೊಂದರ ದೀರ್ಘ ಶಿರೋನಾಮೆ : *ಯುವಕರು ಹಾಗೂ ಗಣಿತ ಅಭ್ಯಾಸಿಗಳ ಉಪಯೋಗ ಹಾಗೂ ಬಳಕೆಗಾಗಿ ಪದಾತಿದಳದ ಸೈನಿಕನೂ, ವಿಶೇಷ ಗಣಿತ ಉಪಾಧ್ಯಾಯನೂ ಆದ ಎಫಿಮ್ ವೈತ್ಯಕೋವ್‌ಸ್ಕಿ ಸಂಕಲನ ಮಾಡಿದ ಶುದ್ಧ ಗಣಿತದ ಸಂಪೂರ್ಣ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ* (1795) ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆ ಹೀಗಿದೆ :

ಸೈನಿಕನೊಬ್ಬನಿಗೆ ಯುದ್ಧದಲ್ಲಿ ಹೋರಾಡುವಾಗ ಆದ ಒಂದೊಂದು ಗಾಯಕ್ಕೂ ಸಂಭಾವನೆ ನೀಡಲಾಯಿತು. ಮೊದಲ ಗಾಯಕ್ಕೆ ಒಂದು ಪೈಸೆ, ಎರಡನೆಯದಕ್ಕೆ 2 ಪೈಸೆಗಳು, ಮೂರನೆಯದಕ್ಕೆ 4 ಪೈಸೆಗಳು... ಹೀಗೆ ಎಲ್ಲ ಗಾಯಗಳಿಗೂ ಸಂಭಾವನೆ ನೀಡಲಾಯಿತು. ಬಳಿಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿ ನೋಡಿದಾಗ, ಅವನಿಗೆ 655 ರೂಪಾಯಿ ಹಾಗೂ 35 ಪೈಸೆಗಳು ಸಂದಾಯವಾಯಿತೆಂದು ತಿಳಿಯಿತು. ಅವನಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಗಾಯಗಳಾಗಿದ್ದವೆಂದು ಲೆಕ್ಕ ಮಾಡಿ.

ಉತ್ತರ :

ಸೈನಿಕನಿಗಾದ ಗಾಯಗಳು x ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ, ಈ ಸಮೀಕರಣ ರಚಿಸೋಣ :

$$65535=1+2+2^2+2^3+\ldots..+2^{x-1}$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ,

$$65535 = \frac{2^{x-1} \times 2-1}{2-1} = 2^x - 1$$

ಇದರಿಂದ, $65536 = 2^x$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, $x = 16$.

ಈ ಸರಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಈ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಯುದ್ಧದ ಗಾಯಗಳಿಗೆ ಇಂಥ ಧಾರಾಳ ಸಂಭಾವನೆ ನೀಡುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ 655 ರೂಪಾಯಿ ಮತ್ತು 35 ಪೈಸೆಗಳ ಸಂಭಾವನೆ ಸ್ವೀಕರಿಸಲು ಸೈನಿಕನೊಬ್ಬನಿಗೆ 16 ಗಾಯಗಳು ಆಗಬೇಕು. ಮಾತ್ರವಲ್ಲ ಅವನು ಜೀವಂತವಾಗಿ ಯುದ್ಧದಿಂದ ಮರಳಿ ಬರಬೇಕು.

■

ಅಧ್ಯಾಯ – ಒಂಭತ್ತು

ಏಳನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ

ಏಳನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮ

ಐದನೆಯ ಗಣಿತ ಪರಿಕರ್ಮಕ್ಕೆ (ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಘಾತಕ್ಕೇರಿಸುವುದು) ಎರಡು ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಗಳಿವೆ ಎಂದು ಐದನೆಯ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ ಇದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

$$a^b = c$$

ಇಲ್ಲಿ 'a' ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು) ಒಂದು ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಯಾದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆ b ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು (ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು). ಓದುಗರು ತಮ್ಮ ಶಾಲಾದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಲಾಗರಿತಂ ಬಗ್ಗೆ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಜ್ಞಾನ ಪಡೆದಿರಬೇಕು. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜಪದ–ಉಕ್ತಿಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಓದುಗರಿಗೆ ಕಷ್ಟವಾಗಲಾರದು :

$$a^{\log_a b}.$$

ಲಾಗರಿತಂಗಳ ವರ್ಗ ಮೂಲವಾದ 'a' ಯನ್ನು 'b' ಸಂಖ್ಯೆಯ ಲಾಗರಿತಂನ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದರೆ, ಆಗ ದೊರಕುವ ಫಲಿತಾಂಶ 'b' ಆಗಿರುವುದು.

ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದುದೇಕೆ? ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ವೇಗವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಸರಳವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಇವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು. ಮೊದಲ ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಸಂಶೋಧಿಸಿದವನು ನೇಪಿಯರ್, ಈ ಕೋಷ್ಟಕ ರಚಿಸಲು ತನಗೆ ಪ್ರಚೋದನೆ ಯಾವುದೆಂದು ತಿಳಿಸಿದ್ದಾನೆ: ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳು ಎಷ್ಟು ತ್ರಾಸದಾಯಕವಾಗಿದೆಯೆಂದರೆ, ಹಲವರು ಗಣಿತದ ಕಲಿಕೆಯೆಂದರೆ ದಿಗಿಲುಪಡುವಂತಾಗಿದೆ; ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳ ತೊಡಕು ಹಾಗೂ ಬೇಸರವನ್ನು ನಿವಾರಿಸಲು ತನಗೆ ಶಕ್ಯವಿರುವಷ್ಟು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ಕೋಷ್ಟಕ ರಚಿಸಿರುವುದಾಗಿ ಹೇಳಿದ್ದಾನೆ.

ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಅಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಸರಳೀಕರಿಸಿ ಕ್ಷಿಪ್ರಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ನಿಜ. ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಬೇರೆ ವಿಧಾನಗಳ ಮೂಲಕ ವಿಪರೀತ ತೊಡಕೆನಿಸುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಲಾಗರಿತಂ ನೆರವಿನಿಂದ ಮಾಡಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಬೃಹತ್ ಘಾತ ಸೂಚಕದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು.

ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಆವಿಷ್ಕಾರವು ತಿಂಗಳುಗಟ್ಟಲೆ ತಗಲುತ್ತಿದ್ದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕೆಲವೇ ದಿನಗಳಿಗೆ ತಗ್ಗಿಸಿ, ಆ ಮೂಲಕ ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳ ಆಯುಷ್ಯವನ್ನು ಇಮ್ಮಡಿಗೊಳಿಸಿತೆಂದು ಲ್ಯಾಪ್ಲೇಸ್ ಬರೆದಿರುವುದು ಒಪ್ಪಬೇಕಾದ ವಿಷಯ. ಕ್ಲಿಷ್ಟವಾದ, ಪ್ರಯಾಸಕರವಾದ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕಾಗಿದ್ದವರು ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳಾದ್ದರಿಂದ, ಈ ಮಹಾನ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಅವರನ್ನು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿದ್ದಾನೆ. ಆದರೆ ಉದ್ದುದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿರುವ ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಅವನ ಮಾತುಗಳು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ.

ಇಂದು ನಮಗೆ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಬಳಕೆ ಅಭ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ; ಅವು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳನ್ನು ಯಾವ ಹಂತದವರೆಗೆ ಸರಳೀಕರಿಸುತ್ತದೆಯೋ, ಆ ಹಂತದವರೆಗೆ ನಮಗೆ ಅವುಗಳ ಬಳಕೆ ಅಭ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಥಮ ಬಾರಿ ಇವು ಪ್ರಕಟವಾದಾಗ ಉಂಟಾದ ಆಶ್ಚರ್ಯ ಹಾಗೂ ಉತ್ಸಾಹವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ನಮಗೀಗ ಸಾಧ್ಯವಾಗಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ. ನೇಪಿಯರ್‌ನ ಸಮಕಾಲೀನನಾದ ಹೆನ್ರಿಬ್ರಿಗ್ಸ್ (ಈತ ಅನಂತರದ ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 10 ಆಧಾರಿತ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಶೋಧಿಸಿ ಖ್ಯಾತನಾದ), ನೇಪಿಯರ್ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ತಿಳಿದ ಬಳಿಕ ಪತ್ರವೊಂದರಲ್ಲಿ ಹೀಗೆ ಬರೆದ : "ಮಾರ್ಕಿನ್‌ಸ್ಟಾವ್‌ನ ಅಧಿಪತಿಯಾದ ನೆಪ್ಪೀರ್ (ನೇಪಿಯರ್) ತಾನು ಹೊಸದಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದ ಪ್ರಶಂಸಾರ್ಹ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಮೂಲಕ ನನ್ನ ತಲೆ ಹಾಗೂ ಕೈಗಳನ್ನು ಚುರುಕಾಗಿಸಿದ್ದಾನೆ. ದೇವರ ದಯೆಯಿಂದ, ಈ ಬೇಸಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಅವನನ್ನು ಭೇಟಿಯಾಗಬೇಕೆಂದಿದ್ದೇನೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ನನ್ನನ್ನು ಇಷ್ಟು ಚಕಿತಗೊಳಿಸಿದ ಅಥವಾ ಸಂತೋಷಗೊಳಿಸಿದ ಪುಸ್ತಕ ಬೇರೊಂದಿಲ್ಲ." ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಸಂಶೋಧಕನನ್ನು ಭೇಟಿ ಮಾಡಲೆಂದು ಬ್ರಿಗ್ಸ್ ಸ್ಕಾಟ್ಲೆಂಡಿಗೆ ಹೊರಟ. ನೇಪಿಯರ್‌ನನ್ನು ಭೇಟಿಯಾದಾಗ ಬ್ರಿಗ್ಸ್ ಉದ್ಗರಿಸಿದ, "ಸ್ವಾಮಿ, ನಿಮ್ಮನ್ನು ಖುದ್ದಾಗಿ ನೋಡಬೇಕೆಂದೇ ಈ ದೀರ್ಘ ಪ್ರಯಾಣ ಕೈಗೊಂಡೆ. ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಂತ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುವ ಈ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಮೊದಲ ಬಾರಿ ಕಲ್ಪಿಸಿದ ನಿಮ್ಮ ಬುದ್ಧಿಮತ್ತೆಯನ್ನು, ಆವಿಷ್ಕಾರ ಗುಣವನ್ನು ತಿಳಿಯಲೆಂದು ಬಂದೆ. ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನಿಮ್ಮ ಬಳಿ ಇರುವಾಗ, ಇಷ್ಟೊಂದು ಸುಲಭವೆಂದು ಈಗ ತೋರುವ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಈ ಮುನ್ನ ಬೇರ್‍ಯಾರೂ ಯಾಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಿಲ್ಲ ಎಂದು ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ."

ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಪ್ರತಿಸ್ಪರ್ಧಿಗಳು

ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮುನ್ನ, ವೇಗವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ನೆರವಾಗುವ ಪ್ರಯತ್ನಗಳ ಫಲವಾಗಿ ಬೇರೆ ವಿಧದ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಅಂತಹ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಗುಣಾಕಾರದ ಬದಲಾಗಿ ವ್ಯವಕಲನವನ್ನು (ಸಂಕಲನವನ್ನಲ್ಲ) ಬಳಸಲಾಗಿತ್ತು. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ ಇಂತಹ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಲಾಗಿತ್ತು.

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}.$$

ಇದರ ಆವರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ನಿಜವೆಂಬುದು ಯಾರಿಗಾದರೂ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಎಲ್ಲ ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದಂಶವೆಷ್ಟೆಂದು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿದ ಕೋಷ್ಟಕವಿದ್ದರೆ, ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಪಡೆಯಲು ಅವನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಅವೆರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತದ ವರ್ಗದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದಂಶದಿಂದ, ಅವೆರಡರ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ವರ್ಗದ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದಂಶವನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಕೋಷ್ಟಕದ ನೆರವಿನಿಂದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವರ್ಗಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸುವ ಹಾಗೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಮೂಲ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಇವನ್ನು ವಿಲೋಮಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ಜೊತೆ ಬಳಸಿದರೆ, ಈ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನೂ ಸರಳೀಕರಿಸುತ್ತವೆ. ಲಾಗರಿತಂಗಳಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ ಈ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಿಂದ ಒದಗುವ ಅನುಕೂಲ: ಇವು ನಿಖರವಾದ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ

(ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಸರಿಸುಮಾರಾದ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತವೆ) ಆದರೆ ಇವು ಲಾಗರಿತಂಗಳಷ್ಟು ಉಪಯುಕ್ತವಲ್ಲ. ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಹಲವು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದಂಶ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಿಂದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಗುಣಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಆದರೆ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ನೆರವಿನಿಂದ ಗುಣಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಷ್ಟಿದ್ದರೂ, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಒಮ್ಮೆಲೇ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯ. ಮಾತ್ರವಲ್ಲ, ಲಾಗರಿತಂಗಳಿಂದ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಯಾವ ಘಾತಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದರೂ ಏರಿಸಬಹುದು; ಘಾತಾಂಕವು ಎಷ್ಟೇ ತೊಡಕಿನದಾಗಿದ್ದರೂ (ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಥವಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿ) ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದಂಶ ಪಟ್ಟಿಮಾಡುವ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ನೆರವಿನಿಂದ ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ.

ಆದರೆ ಬಗೆಬಗೆಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಪ್ರಕಟವಾದ ಬಳಿಕವೂ, ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಾಲ್ಕನೆಯ ಒಂದಂಶಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಲೇ ಇದ್ದವು. ಫ್ರಾನ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ 1856ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾದ ಇಂತಹ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ಮುಖಪುಟದ ವಿವರಣೆ ಹೀಗಿತ್ತು:

1 ರಿಂದ 1000 ಮಿಲಿಯನ್‌ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ. ಇದರ ನೆರವಿನಿಂದ ಲಾಗರಿತಂಗಳಿಗಿಂತ ಬಹಳ ಸರಳವಾದ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಹು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಪತ್ತೆ ಮಾಡಬಹುದು – ಸಂಕಲನಕಾರ ಅಲೆಕ್ಸಾಂಡರ್ ಕೊಸ್ಸಾರ್.

ಇದು ಹಳೆಯ ವಿಧಾನ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯದ ಸಂಶೋಧನಕಾರರು ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ ಇದನ್ನು ಪ್ರಚಾರಕ್ಕೆ ತರಲೆತ್ನಿಸುತ್ತಾರೆ. ಕೊನೆಗೊಮ್ಮೆ ತಾವು ರೂಪಿಸಿದ ಕೋಷ್ಟಕ ಮುನ್ನೂರು ವರ್ಷಗಳಷ್ಟು ಹಳೆಯದೆಂದು ಅರಿವಾದಾಗ ಅವರಿಗೆ ಆಶ್ಚರ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಇನ್ನೊಂದು ಪ್ರತಿಸ್ಪರ್ಧಿ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಆಕರ ಗ್ರಂಥಗಳಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯವಿರುವ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು. ಇವು 2ರಿಂದ 1000ದ ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗ, ಘನ ವರ್ಗಮೂಲ, ಘನಮೂಲ, ವಿಲೋಮಸಂಖ್ಯೆ, ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿ, ವೃತ್ತ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಾಲಂಗಳಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಯುಕ್ತ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು. ಇವು ಅನೇಕ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೆ ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತ ; ಆದರೆ ಆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೆ ಇವು ಮಾತ್ರ ಸಾಕಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಕ್ಕೆ ಅವಕ್ಕಿಂತ ವಿಶಾಲವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಉಪಯೋಗಗಳಿವೆ.

ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ವಿಕಾಸ

ಸೋವಿಯತ್ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಇತ್ತೀಚೆಗಿನವರೆಗೆ ಐದು ಅಂಕೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಈಗ ನಾಲ್ಕಂಕೆಯ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೆ ಇವೇ ಸಾಕು. ಬಹುಪಾಲು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೆ ಮೂರಂಕೆಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಸಾಕು. ಏಕೆಂದರೆ, ಮೂರು ದಶಮಾಂಶಗಳಿಗಿಂತಲೂ ಅಧಿಕ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಅಳತೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗುವ ಸಂದರ್ಭಗಳು ತೀರಾ ಕಡಿಮೆ.

ಕಡಿಮೆ ಸ್ಥಾನಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಬಹುಪಾಲು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೆ ಸಾಕೆಂಬುದು ಇತ್ತೀಚೆಗಷ್ಟೇ ತಿಳಿಯಿತು. ಹಿಂದೊಮ್ಮೆ ಶಾಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಏಳಂಕಿಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ದಪ್ಪ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದರು. ದೀರ್ಘ ಪ್ರತಿಭಟನೆಯ ಬಳಿಕ ಅವುಗಳ ಬದಲು ಐದಂಕಿಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಬಳಕೆಗೆ ಬಂದವು. ಏಳಂಕೆಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳು 1794ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾದಾಗ, ಈ ಆವಿಷ್ಕಾರದ ಬಗ್ಗೆಯೂ ವಿಪರೀತ ಹಿಂಜರಿಕೆ ಇತ್ತು. ಲಂಡನ್ನಿನ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಹೆನ್ರಿಬ್ರಿಗ್ಸ್

1624ರಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಬಾರಿ ರೂಪಿಸಿದ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳಲ್ಲಿ 14 ಅಂಕೆಗಳಿದ್ದವು. ಕೆಲವು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ಇದಕ್ಕೆ ಬದಲಿಯಾಗಿ ಡಚ್ ಗಣಿತಜ್ಞ ಅಡ್ರಿಯನ್ ವ್ಲಾಕ್ ರೂಪಿಸಿದ ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳಲ್ಲಿ 10 ಅಂಕೆಗಳಿದ್ದವು.

ಈ ರೀತಿ, ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಹಲವು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದವು; ಇವು ಕ್ರಮೇಣ ಕಡಿಮೆ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದುದೇ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ವಿಕಾಸದ ಕತೆ. ಇವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಇನ್ನೂ ಜಾರಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ನಿಖರತೆಯು ನಾವು ಮಾಡುವ ಅಳತೆಗಳ ನಿಖರತೆಯನ್ನು ಮೀರಲಾರದೆಂಬ ಸರಳ ಸತ್ಯ ಹಲವರಿಗೆ ಇನ್ನೂ ಮನವರಿಕೆಯಾಗಿಲ್ಲ. ಈ ವಿಷಯ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದಂತೆ ಕ್ರಮೇಣ ಹೆಚ್ಚೆಚ್ಚು ಜನರಿಗೆ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಅತ್ಯಂತ ನಿಖರವಾಗಿರಬೇಕಿಲ್ಲ ಎಂಬುದು ಅರ್ಥವಾದೀತು.

ಲಾಗರಿತಂಗಳ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಎರಡು ಪ್ರಯೋಜನಗಳಿವೆ : (1) ಕೋಷ್ಟಕಗಳ ಗಾತ್ರ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು. (2) ಇದರಿಂದಾಗಿ ಅವುಗಳ ಬಳಕೆ ಸುಲಭವಾಗುವುದು. ಅಂದರೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ವೇಗ ಹೆಚ್ಚುವುದು. ಏಳಂಕಿಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳಿಗೆ ದೊಡ್ಡ ಅಳತೆಯ ಸುಮಾರು 200 ಪುಟಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ ಅವಶ್ಯವಾದರೆ ಐದಂಕಿಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಸಣ್ಣ ಅಳತೆಯ 30 ಪುಟಗಳಲ್ಲೇ ಭರ್ತಿಯಾಗುತ್ತವೆ. ನಾಲ್ಕಂಕಿಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳಿಗೆ 10 ಪಟ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಪುಟಗಳು ಸಾಕು; ಇವುಗಳಿಗೆ ದೊಡ್ಡ ಅಳತೆಯ ಎರಡು ಪುಟಗಳು ಬೇಕಾದರೆ ಮೂರಂಕಿಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಮುದ್ರಿಸಲು ಒಂದೇ ಪುಟ ಸಾಕು.

ಕಡಿಮೆ ಸ್ಥಾನದ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಮೂಲಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ವೇಗ ಅಧಿಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಏಳಂಕಿಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಕ್ಕೆ ತಗಲುವ ಸಮಯದ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಕಡಿಮೆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಐದಂಕಿಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಮೂಲಕ ಅದೇ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಬಹುದು.

ಅಪ್ರತಿಮ ಉದ್ದದ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು

ವ್ಯಾವಹಾರಿಕ ಜೀವನದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್‌ನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೆ ಮೂರು ಅಥವಾ ನಾಲ್ಕಂಕೆಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳೇ ಸಾಕು. ಆದರೆ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದವರಿಗೆ ಬ್ರಿಗ್ಸ್‌ನ ಹದಿನಾಲ್ಕು ಅಂಕಿಗಳ ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕವೂ ಸಾಲದು. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಲಾಗರಿತಂ ಒಂದು ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ. ಹಾಗಾಗಿ, ಅಂಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿಖರವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಬಹುಪಾಲು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ; ಅವುಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳು ಎಷ್ಟೇ ಇರಲಿ, ಆ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ನಿಖರವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ; ಲಾಗರಿತಂಗಳ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಷ್ಟೂ ಅವುಗಳ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚೆಚ್ಚು ಖಚಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಬ್ರಿಗ್ಸ್‌ನ ಹದಿನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳೂ* ಕೆಲವು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತವೆನಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೂ ಸಂಶೋಧಕನ ಅವಶ್ಯಕತೆಗೆ ತಕ್ಕ ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕ ನಿಶ್ಚಯವಾಗಿ ಸಿಗುತ್ತದೆ;

* ಬ್ರಿಗ್ಸ್‌ನ ಹದಿನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳು 1ರಿಂದ 20 000 ಹಾಗೂ 90 000ದಿಂದ 101 000 ದವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಲಭ್ಯವಿವೆ.

ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಆವಿಷ್ಕರಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಪ್ರಕಟವಾದ 500 ವಿವಿಧ ಬಗೆಯ ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ, ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕೋಷ್ಟಕ ಸಂಶೋಧಕನ ಅವಶ್ಯಕತೆಯನ್ನು ನಿಸ್ಸಂಶಯವಾಗಿ ಪೂರೈಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 2ರಿಂದ 1200 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ 20 ಅಂಕೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಕ್ಯಾಲೆಟ್ ಎಂಬಾತ 1795ರಲ್ಲಿ ಫ್ರಾನ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿದ. ಸಣ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಕೆಲವು ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ, ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಅಚ್ಚರಿಪಡಿಸುವಷ್ಟು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಕೆಲವು ಕೋಷ್ಟಕಗಳಲ್ಲಿ ಎಂಥ ದೈತ್ಯ ಗಾತ್ರದ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಇವೆಯೆಂದರೆ ಇಂಥ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂಬುದನ್ನೂ ಅನೇಕ ಗಣಿತಜ್ಞರು ಊಹಿಸಿರಲಿಕ್ಕಿಲ್ಲ.

ಇಂತಹ ಅಪ್ರತಿಮ ಉದ್ದದ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಪುಟ್ಟಪಟ್ಟಿ ಮುಂದಿದೆ. (ಇವೆಲ್ಲ ನೈಸರ್ಗಿಕ ಲಾಗರಿತಂಗಳು. ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳಲ್ಲ)* :

10 000ದ ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ, 48 ಅಂಕೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ವೂಲ್ಫ್ರಾಮ್ ಕೋಷ್ಟಕ;

61– ಅಂಕೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಶಾರ್ಪ್ ಕೋಷ್ಟಕ;

102 – ಅಂಕೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಪಾರ್ಕ್‌ಹರ್ಸ್ಟ್ ಕೋಷ್ಟಕ; ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಅದ್ಭುತವಾದ ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕವೊಂದಿದೆ; ಅದುವೇ ಆಡಮ್ಸ್‌ನ 260 ಅಂಕೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಕೋಷ್ಟಕ.

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯದನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕವೆಂದು ಹೇಳುವಂತಿಲ್ಲ.

ಇದರಲ್ಲಿರುವುದು 2, 3, 5, 7 ಮತ್ತು 10 – ಈ ಐದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನ್ಯಾಚುರಲ್ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಲು ಅವಶ್ಯವಾದ 260 – ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ಗುಣಕ. ಈ ಐದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಲಭ್ಯವಿದ್ದರೆ, ಅವನ್ನು ಕೂಡಿಸಿ, ಅಥವಾ ಗುಣಿಸಿ ಹಲವಾರು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 12ರ ಲಾಗರಿತಂ ಪಡೆಯಲು 2, 2 ಮತ್ತು 3ರ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದರಾಯಿತು.

ಇನ್ನೊಂದು ಲಾಗರಿತಮ್ಸ್ ಸೋಜಿಗ–ಸ್ಲೈಡ್ ರೂಲ್. ("ಮರದ ಪಟ್ಟಿಯ ಲಾಗರಿತಂಗಳು"). ಇದು ಇಂಜಿನಿಯರ್ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಸಾಧನವಾಗಿ ತೀರಾ ಪರಿಚಿತ ವಸ್ತುವಾಗಿಬಿಟ್ಟಿದೆ. ಹಿಂದಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಗುಮಾಸ್ತರ ಬಳಿ ಇರುತ್ತಿದ್ದ ಲೆಕ್ಕದ ಮಣಿ ಚೌಕಟ್ಟಿನಂತೆ (ಅಬಾಕಸ್), ಇಂಜಿನಿಯರ್ ಅವರೆಲ್ಲ ಸ್ಲೈಡ್‌ರೂಲನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಾರೆ. ಸ್ಲೈಡ್‌ರೂಲ್ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ತತ್ವವನ್ನೇ ಆಧರಿಸಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತದೆಯಾದರೂ, ಇದನ್ನು ಬಳಸುವಾತನಿಗೆ ಲಾಗರಿತಂನ ಜ್ಞಾನವೇ ಇರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ನಿತ್ಯ ಬಳಕೆಯ ಸಾಧನವಾಗಿರುವ ಸ್ಲೈಡ್‌ರೂಲ್‌ನ ಈ 'ಗುಟ್ಟು' ನಮಗೀಗ ಅಚ್ಚರಿಯ ವಿಷಯವಲ್ಲ.

ರಂಗಪ್ರದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ಲಾಗರಿತಂಗಳು

ವೃತ್ತಿಪರ ಗಣಿತಕಾರರು ಅನೇಕ ವಿಸ್ಮಯಕಾರಿ ಗಣಿತ ಚಮತ್ಕಾರಗಳ ರಂಗಪ್ರದರ್ಶನ ನೀಡಬಲ್ಲರು. ದೀರ್ಘ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಹಿರಿದಾದ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಮಿಂಚಿನ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಮಾನಸಿಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಹಾಕುವುದು ಅಂಥ ಚಮತ್ಕಾರಗಳಲ್ಲೊಂದು. ನೀವು ಮನೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತು 35 – ಅಂಕೆಗಳ ಬೃಹತ್ ಸಂಖ್ಯೆಯ 31ನೆಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಷ್ಟಪಟ್ಟು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ

* ಸಹಜ ಲಾಗರಿತಂಗಳಲ್ಲಿ 2.718 ಅನ್ನು (10ರ ಬದಲು) ಘಾತ ಮೂಲವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಮುಂದೆ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಳಗಿದ ಗಣಿತಕಾರನನ್ನು ಸೋಲಿಸಲು ತಯಾರಾಗುತ್ತೀರಿ. ರಂಗಪ್ರದರ್ಶನದಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಸಮಯ ನೋಡಿ ಆ ವೃತ್ತಿಪರ ಗಣಿತಕಾರನನ್ನು ಪ್ರಶ್ನಿಸುತ್ತೀರಿ :

"ಈ 35–ಸ್ಥಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ 31ನೆಯ ಘಾತಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಾನು ಹೇಳುತ್ತ ಹೋದಂತೆ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಳ್ಳಿ."

ಗಣಿತಕಾರ ಸೀಮೆಸುಣ್ಣದ ಚೂರನ್ನು ಎತ್ತಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ನೀವು ಬೃಹತ್ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊದಲ ಅಂಕೆಯನ್ನು ಹೇಳಲು ಬಾಯಿ ತೆರೆಯುವಷ್ಟರಲ್ಲಿ, ಆತ ಈ ಉತ್ತರವನ್ನೇ ಕರಿಹಲಗೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದುಬಿಡುತ್ತಾನೆ : 13.

ಪ್ರಶ್ನಾ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದೆಂದು ತಿಳಿಯದಿದ್ದರೂ ಆತ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲೇ ಮಿಂಚಿನ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿ ಅದರ 31ನೆಯ ವರ್ಗ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡಿದ್ದಾನೆ !

ಇದನ್ನು ಕಂಡು ನೀವು ದಿಗ್ಭ್ರಾಂತರಾಗಿ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳುತ್ತೀರಿ. ಆದರೆ ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಇಂದ್ರಜಾಲವೂ ಇಲ್ಲ. ಇದರ ಗುಟ್ಟು : 31ನೆಯ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದಾಗ 35 ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ನೀಡುವ ಏಕೈಕ ಸಂಖ್ಯೆ, 13. ಇದಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ 31ನೆಯ ಘಾತದ ಸ್ಥಾನಗಳು 35ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಹಾಗೂ ಇದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಯ 31ನೆಯ ಘಾತದ ಸ್ಥಾನಗಳು 35ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ.

ಆದರೆ ಇದು ಗಣಿತಜ್ಞನಿಗೆ ಗೊತ್ತಾದುದು ಹೇಗೆ ? ಆತ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಉತ್ತರ 13 ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿದುದು ಹೇಗೆ ? ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ, ಈ ಉತ್ತರ ಪಡೆಯುವುದು ತೀರಾ ಸುಲಭ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ 15 ರಿಂದ 20ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎರಡು–ಸ್ಥಾನಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಪಾಠ ಮಾಡಿಕೊಂಡರಾಯಿತು. ಅವನ್ನು ಬಾಯಿಪಾಠ ಮಾಡುವುದು ಸುಲಭ. ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಲಾಗರಿತಂ ಅದರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, 2, 3 ಮತ್ತು 7ರ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ ($\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2$ ಎಂದು ನೆನಪಿರಲಿ) ಮೊದಲ ಹತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡಂತಾಗುತ್ತದೆ. 11ರಿಂದ 20ರವರೆಗಿನ ಹತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಬಾಯಿಪಾಠ ಮಾಡಲು ಇನ್ನೂ ನಾಲ್ಕು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಂಡರಾಯಿತು.

ರಂಗಪ್ರದರ್ಶನ ನೀಡುವ ಪಳಗಿದ ಗಣಿತಕಾರರು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡಂಕೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಬಾಯಿ ಪಾಠ ಮಾಡಿ ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಂಡಿರುತ್ತಾರೆ :

ಸಂಖ್ಯೆ	ಲಾಗರಿತಂ
2	0.30
3	0.48
4	0.60
5	0.70
6	0.78
7	0.85
8	0.90
9	0.95

ಸಂಖ್ಯೆ	ಲಾಗರಿತಂ
11	1.04
12	1.08
13	1.11
14	1.15
15	1.18
16	1.20
17	1.23
18	1.26
19	1.28

ಇಲ್ಲಿ ನಿಮ್ಮನ್ನು ಚಕಿತಗೊಳಿಸಿದ ಗಣಿತ ತಂತ್ರ :

$$\log \sqrt[31]{(35\text{ಅಂಕೆಗಳು})} = \frac{34,\ldots}{31}.$$

ಇದರ ಉತ್ತರ (ಲಾಗರಿತಂ), ಇವೆರಡರ ನಡುವಣ ಮೌಲ್ಯ :

$$\frac{34}{31} \text{ ಮತ್ತು } \frac{34.99}{31}$$

ಅಥವಾ ಇವೆರಡರ ನಡುವಣ ಮೌಲ್ಯ: 1.09 ಮತ್ತು 1.13.

ಈ ಎರಡರ ನಡುವಣ ಮೌಲ್ಯದ ಲಾಗರಿತಂ ಹೊಂದಿರುವ ಏಕೈಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 13 ; ಇದರ ಲಾಗರಿತಂ 1.11. ಈ ಪ್ರಕಾರ ಆ ದಂಗುಬಡಿಸುವ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಯಿತು. ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವನ್ನೆಲ್ಲ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಮಿಂಚಿನ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿ ಮುಗಿಸಲು ವೃತ್ತಿಪರ ಗಣಿತಕಾರನ ತರಬೇತಿ, ಕುಶಲತೆ ಹಾಗೂ ಜಾಣ್ಮೆ ಇರಬೇಕೆಂಬುದೇನೋ ನಿಜ. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದಂತೆ ಇದು ತೀರಾ ಸರಳ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ. ಇಂತಹ ಚಮತ್ಕಾರಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ತೋರಿಸಲು ನಿಮಗೂ ಸಾಧ್ಯ. ಮೊದಮೊದಲು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲಾಗದಿದ್ದರೂ ತುಂಡು ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಾದರೂ ಮಾಡಬಲ್ಲಿರಿ.

ಈಗ 20–ಸ್ಥಾನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ 64ನೆಯ ಘಾತಮೂಲವನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯ ಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಯಾವುದೆಂದು ತಿಳಿಯದಿದ್ದರೂ ನೀವು ಉತ್ತರ ಹೇಳಬಹುದು : ವರ್ಗಮೂಲ 2.

ಈ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ,

$$\log \sqrt[64]{(20\text{ಅಂಕೆಗಳು})} = \frac{19\ldots}{64}.$$

ಇದರ ಉತ್ತರ ಇವೆರಡರ ನಡುವಣ ಮೌಲ್ಯ: $^{19}/_{64}$ ರಿಂದ $^{19.99}/_{64}$, ಅಥವಾ 0.29 ಮತ್ತು 0.32. ಇಂಥ ಲಾಗರಿತಂ ಹೊಂದಿರುವ ಏಕೈಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕ 2; ಇದರ ಲಾಗರಿತಂ 0.30.

ನಿಮಗೆ ಪ್ರಶ್ನೆ ಕೇಳಿದವನು ಹೇಳಬೇಕೆಂದಿದ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀವೇ ತಿಳಿಸಿ ಆತನನ್ನು ದಂಗುಬಡಿಸಬಹುದು. ಅದು ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಚದುರಂಗ ಸಂಖ್ಯೆ:

$$2^{64} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616.$$

ಜಾನುವಾರು ಸಾಕಣೆಯಲ್ಲಿ ಲಾಗರಿತಂಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಶರೀರ ನಿರ್ವಹಣೆಗೆ ಅವಶ್ಯವಾದ ಆಹಾರ ಪ್ರಮಾಣವು ಪ್ರಾಣಿಯ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಕ್ಕೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ. (ಶರೀರ ನಿರ್ವಹಣೆಯ ಆಹಾರ ಪ್ರಮಾಣ ಎಂಬುದು ಉಷ್ಣತೆ ಹೊರಸೂಸುವಿಕೆ, ದೇಹದ ಒಳಾಂಗಗಳ ಕೆಲಸ, ಮೃತ ಜೀವಕೋಶಗಳ ಬದಲಾಗಿ ಹೊಸಕೋಶಗಳ ರಚನೆ – ಇಂಥ ಶಾರೀರಿಕ ಅವಶ್ಯಕತೆಗಳ ನಿರ್ವಹಣೆಗೆ ಬೇಕಾದ ಕನಿಷ್ಠ

ಆಹಾರ ಪ್ರಮಾಣ).* ಇದನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿ, 630 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂಗಳ ತೂಕದ ಎತ್ತಿಗೆ 13 500 ಕ್ಯಾಲೋರಿಗಳ ಪರಿಮಾಣದ ಆಹಾರ ಬೇಕಾದರೆ, ಅದೇ ವಾತಾವರಣದಲ್ಲಿರುವ 420 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂಗಳ ತೂಕದ ಎತ್ತಿಗೆ ಅವಶ್ಯವಾದ ಶರೀರ ನಿರ್ವಹಣಾ ಆಹಾರದ ಕ್ಯಾಲೋರಿಗಳ ಪರಿಮಾಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರ :

ಜಾನುವಾರು ಸಾಕಣೆಯ ಈ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸಲು ಬೀಜಗಣಿತದ ಜೊತೆಗೆ ರೇಖಾ ಗಣಿತವನ್ನೂ ಬಳಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಕ್ಯಾಲೋರಿ ಪರಿಮಾಣ x ಎಂಬುದು ಎತ್ತಿನ ಮೇಲ್ಮೈ (s) ಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ,

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{s}{s_1}$$

ಇಲ್ಲಿ s_1 ಎಂಬುದು 630 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ತೂಕದ ಎತ್ತಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ. ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ ಎರಡು ಅನುರೂಪ ಕಾಯಗಳ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ (s) ಅನುಪಾತವು, ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳ (l) ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮ. ಅದೇ ರೀತಿ, ಅವುಗಳ ಗಾತ್ರಗಳ (ಹಾಗೂ ಗಾತ್ರಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿರುವ ತೂಕಗಳ) ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಘನಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$\frac{s}{s_1} = \frac{l^2}{l_1^2}, \quad \frac{420}{630} = \frac{l^3}{l_1^3}, \text{ ಈ ಪ್ರಕಾರ, } \frac{l}{l_1} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}}.$$

ಇದರಿಂದ,

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{\sqrt[3]{420^2}}{\sqrt[3]{630^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2},$$

$$x = 13\,500\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕ ಬಳಸಿದರೆ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ :

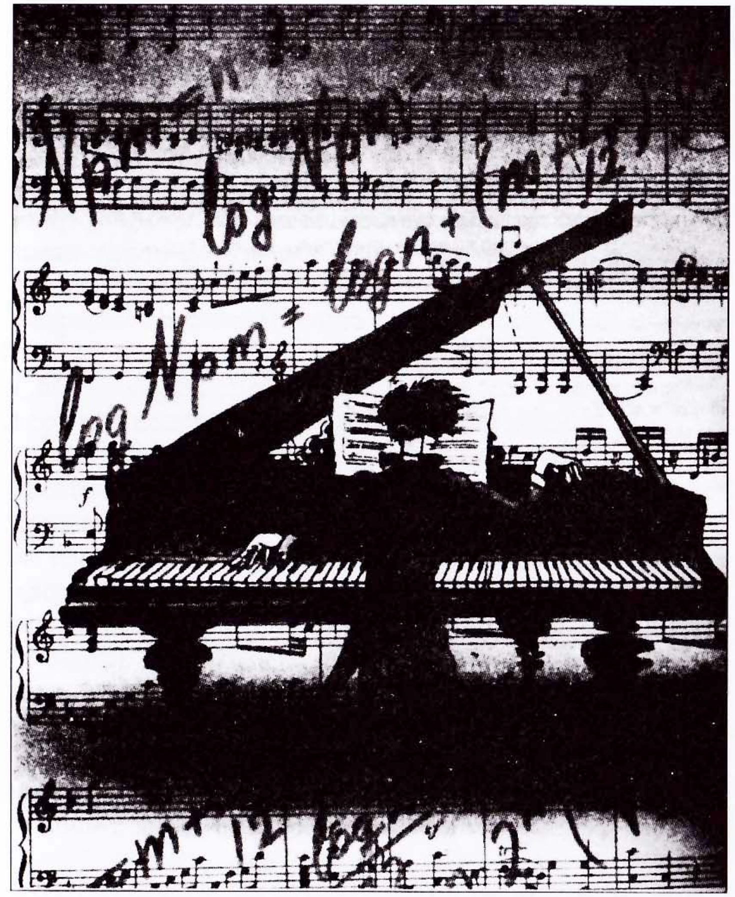
$$x = 10\,300.$$

ಈ ಪ್ರಕಾರ, 420 ಕಿಲೋಗ್ರಾಂ ತೂಕದ ಎತ್ತಿಗೆ 10 300 ಕ್ಯಾಲೋರಿ ಪರಿಮಾಣದ ಆಹಾರ ಅವಶ್ಯ.

ಸಂಗೀತದಲ್ಲಿ ಲಾಗರಿತಂಗಳು

ಸಂಗೀತಗಾರರಿಗೆ ಗಣಿತ ಅಚ್ಚುಮೆಚ್ಚಿನದಲ್ಲ; ಬಹುಪಾಲು ಸಂಗೀತಗಾರರು ಗಣಿತವನ್ನು ಗೌರವಿಸುತ್ತಾರಾದರೂ, ಅದರಿಂದ ದೂರವಿರಲು ಬಯಸುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ 'ಬೀಜಗಣಿತ ಬಳಸಿ ಸ್ವರಮೇಳ' ತಾಳೆನೋಡದ (ಪುಷ್ಕಿನ್ನನ ಸಲ್ಯೆರಿಯಂತೆ) ಸಂಗೀತಗಾರರೂ ತಾವು ಕಲ್ಪಿಸುವುದಕ್ಕಿಂತ

* ಇದಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿ "ಉತ್ಪಾದನಾ ಆಹಾರ ಪ್ರಮಾಣ" ಎಂಬುದಿದೆ. ಇದು ಪ್ರಾಣಿಯನ್ನು ಮಾಂಸಕ್ಕಾಗಿ ಕೊಬ್ಬಿಸಲು ಅವಶ್ಯವಾದ ಆಹಾರ ಪ್ರಮಾಣ.



ಚಿತ್ರ 46

ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಗಣಿತದ ಸಂಪರ್ಕ ಪಡೆಯುತ್ತಾರೆ. ಅವರು ಸಂಪರ್ಕ ಪಡೆಯುವುದು ಲಾಗರಿತಂಗಳಂತಹ ಗಾಬರಿ ಪಡಿಸುವ ವಿಷಯದ ಜೊತೆ !

ಪ್ರೊ॥ ಎ. ಐಚೆನ್‌ವಾಲ್ಡ್ ಎಂಬ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿ ಬರೆದ ಲೇಖನದಿಂದ ವಿವರಣೆಯೊಂದನ್ನು ಮುಂದೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾಗಿದೆ. "ಪುಟ್ಟ ಮತ್ತು ದೀರ್ಘ ಅಂತರಗಳ ಬಗ್ಗೆ" ಎಂಬ ಹೆಸರಿನ ಈ ಲೇಖನ *1919ರ ರಷಿಯನ್ ಪಂಚಾಂಗ*ದಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾಗಿತ್ತು.

"ಬಾಲ್ಯದಲ್ಲಿ ವ್ಯಾಯಾಮ ಶಾಲೆಗೆ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದ ದಿನಗಳಿಂದಲೂ ನನ್ನ ಗೆಳೆಯನಿಗೆ ಪಿಯಾನೋ ಎಂದರೆ ಇಷ್ಟ ; ಆದರೆ ಗಣಿತವೆಂದರೆ ಅಸಹನೀಯ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಸಂಗೀತಗಳಿಗೆ

ಯಾವ ಸಮಾನ ಸಂಗತಿಯೂ ಇಲ್ಲವೆಂಬ ಭಾವನೆಯಿಂದಲೇ ಅವನು ಮಾತಾಡುತ್ತಿದ್ದನು. 'ಪೈಥಾಗೊರಸನು ಧ್ವನಿ ಕಂಪನಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವುದೋ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ ನೆಂಬುದೇನೋ ನಿಜ. ಆದರೆ ಪೈಥಾಗೊರಸನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರವೇ ನಮ್ಮ ಸಂಗೀತಕ್ಕೆ ನಿರುಪಯೋಗಿಯಾಗಿಬಿಟ್ಟಿತು."

"ಆಧುನಿಕ ಪಿಯಾನೋದ ಕೀಗಳ ಮೇಲೆ ಕೈಯಾಡಿಸುವ ನನ್ನ ಗೆಳೆಯ ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಬಳಸುತ್ತಿದ್ದಾನೆಂದು ನಾನವನಿಗೆ ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟಾಗ ಅವನಿಗಾದ ಅಚ್ಚರಿಯನ್ನು ನೀವು ಊಹಿಸಬಲ್ಲಿರಿ. ನಾದ ಪಟ್ಟಿಕೆಯನ್ನು ರೂಪಿಸುವಾಗ ಅದರ ಹಂತಗಳನ್ನು ಧ್ವನಿಯ ಕಂಪನಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅಥವಾ ಧ್ವನಿಯ ತರಂಗಾಂತರಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಸಮಾನ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿರುವುದಿಲ್ಲ; ಈ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಈ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ವರ್ಗಮೂಲ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ 10 ಅಲ್ಲ, ಬದಲಾಗಿ '2'.

"ಮಂದ್ರಸ್ಥಾಯಿಯ 'ದೊ' ಸ್ವರವು (ಇದನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಸ್ಥಾಯಿ ಎನ್ನೋಣ) ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ n ಕಂಪನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವುದು ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಮಂದ್ರಸ್ಥಾಯಿಯ 'ದೊ' ಸ್ವರದ ಕಂಪನ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 2n. ಹಾಗೆಯೇ m ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ಥಾಯಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಸ್ವರದ ಕಂಪನಗಳು $n \times 2^m$. ಇದೇ ರೀತಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕಂಪನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಪಿಯಾನೋದ ನಾದ ಪಟ್ಟಿಕೆಯ ಎಲ್ಲಾ ಸ್ವರಗಳನ್ನು p ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಅಲ್ಲದೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ಥಾಯಿಯ ಆಧಾರ ಸ್ವರ 'ದೊ' ಅನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಸ್ವರವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, 'ಸೋಲ್' ಎಂಬುದು 7ನೆಯ ಸ್ವರವೂ, 'ಲಾ' ಎಂಬುದು 9ನೆಯ ಸ್ವರವೂ ಆಗುವುದು. ಪುನಃ 'ದೊ' ಎಂಬುದು 12ನೆಯ ಸ್ವರವಾಗಿ ಬರುವುದು; ಆದರೆ ಈ 'ದೊ' ಮುಂದಿನ ಸ್ಥಾಯಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ನಾದ ಪಟ್ಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ವರವೂ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಸ್ವರಕ್ಕಿಂತ $\sqrt[12]{2}$ ಅಧಿಕ ಕಂಪನಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ವರದ ಕಂಪನ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರದ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸಬಹುದು :

$$N_{pm} = n \times 2^m \left(\sqrt[12]{2}\right)^p .$$

"ಇದರ ಸೂತ್ರಾಂಶಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಪಡೆದಾಗ,

$$\log N_{pm} = \log n + m \log 2 + p \frac{\log 2}{12}$$

ಅಥವಾ,

$$\log N_{pm} = \log n + \left(m + \frac{p}{12}\right) \log 2 .$$

ಈಗ ಮಂದ್ರಸ್ಥಾಯಿಯ 'ದೊ' ಇದರ ಕಂಪನಗಳನ್ನು ಏಕ $(n=1)$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಹಾಗೂ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನೆಲ್ಲ 2 ಘಾತಮೂಲದವುಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ (ಅಥವಾ $\log 2 = 1$ ಎಂದು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದರೆ) ದೊರೆಯುವ ಸೂತ್ರ :

$$\log N_{pm} = m + \frac{p}{12} .$$

"ಇದರಿಂದ ಪಿಯಾನೋದ ಮೇಲಿರುವ ಕೀಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ವರಗಳ ಕಂಪನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು (12ರಿಂದ ಗುಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ) ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಸ್ಥಾಯಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಲಾಗರಿತಂನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದೂ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸ್ಥಾಯಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ವರದ ಸಂಖ್ಯೆಯು (12ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ) ಲಾಗರಿತಂನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯೆಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು."

ಇದನ್ನೀಗ ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಮೂರನೆಯ ಸ್ಥಾಯಿಯ 'ಸೋಲ್' ಸ್ವರದಲ್ಲಿ, ಅಂದರೆ $3+\frac{7}{12}$ (≈ 3.583) ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಅಂಕೆ 3 ಎಂಬುದು, ಸ್ವರದ ಕಂಪನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಲಾಗರಿತಂನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ; ಹಾಗೂ $\frac{7}{12}$ (≈ 0.583) ಎಂಬುದು ಆ ಲಾಗರಿತಂನ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು ಆಗಿದೆ; ಈ ಲಾಗರಿತಂನ ವರ್ಗಮೂಲ 2 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊದಲ ಸ್ಥಾಯಿಯ 'ದೊ' ಸ್ವರದ ಕಂಪನ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ, ಈ ಕಂಪನ ಸಂಖ್ಯೆಯು $2^{3.583}$ ಅಥವಾ 11.98 ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ.

ನಕ್ಷತ್ರಗಳು, ಶಬ್ದಗಳು ಮತ್ತು ಲಾಗರಿತಂಗಳು

ಜೊತೆ ಸೇರಿಸಲಾಗದ ವಿಷಯಗಳೆಂದು ತೋರುವ ನಕ್ಷತ್ರಗಳು, ಶಬ್ದ ಮತ್ತು ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಜೊತೆ ಸೇರಿಸಿರುವ ಈ ತಲೆಬರಹ ಕುಜ್ಮಾ ಪ್ರುಟ್‌ಕೊವ್ ಮತ್ತು ಅವನ ಪ್ರಬಂಧಗಳನ್ನು ಅನುಕರಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನವಲ್ಲ; ನಿಕಟವಾಗಿ ಸಂಬಂಧಿಸಿರುವ ಇವು ಮೂರರ ಕುರಿತು ಮುಂದೆ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆ ಮತ್ತು ನಕ್ಷತ್ರಗಳ ಉಜ್ವಲತೆ – ಇವೆರಡನ್ನೂ ಒಂದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ, ಲಾಗರಿತಂ ಮಾನದಲ್ಲಿ ಅಳೆಯಲಾಗುವುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವನ್ನು ಜೊತೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು ನಕ್ಷತ್ರಗಳ ಪ್ರಕಾಶಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಅವನ್ನು ಮೊದಲ ಶ್ರೇಣಿಯ ನಕ್ಷತ್ರಗಳು, ಎರಡನೆಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ನಕ್ಷತ್ರಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸುತ್ತಾರೆ. ನಕ್ಷತ್ರ ಪ್ರಕಾಶದ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸರಣಿಯು ಮಾನವನ ಕಣ್ಣಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತೀಯ ಸರಣಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಂತೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, ಭೌತಿಕ ಉಜ್ವಲತೆಯು ಬೇರೊಂದು ನಿಯಮಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ; ನಕ್ಷತ್ರಗಳ ನೈಜ ಪ್ರಕಾಶವು 2.5 ಅನುಪಾತದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿದೆ. ನಕ್ಷತ್ರಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯು ಅವುಗಳ ಭೌತಿಕ ಉಜ್ವಲತೆಯ ಲಾಗರಿತಂ ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮೂರನೆಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ನಕ್ಷತ್ರಗಳು ಮೊದಲನೆಯ ಶ್ರೇಣಿಯ ನಕ್ಷತ್ರಗಳಿಗಿಂತ 2.5^{3-1} ಅಥವಾ 6.25 ಪಟ್ಟು ಉಜ್ವಲವಾಗಿವೆ. ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳು 2.5 ವರ್ಗಮೂಲದ ಲಾಗರಿತಂ ಕೋಷ್ಟಕ ಬಳಸಿ, ನಕ್ಷತ್ರಗಳ ಉಜ್ವಲತೆಯನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸುತ್ತಾರೆ. ಈ ವಿಷಯವನ್ನು '*ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನ*' ಎಂಬ ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್ ಅವರ ರಷ್ಯನ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಸವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆಯನ್ನು ಸಹ ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ವಿವರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಕೆಲಸಗಾರರ ಆರೋಗ್ಯ ಮತ್ತು ಕೆಲಸದ ಉತ್ಪಾದಕತೆಯ ಮೇಲೆ ಕೈಗಾರಿಕಾ ಶಬ್ದದ ದುಷ್ಪರಿಣಾಮಗಳು– ಇವುಗಳ ಮಹತ್ವದ ಅರಿವು. ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆಯ ನಿಖರ ಸಂಖ್ಯಾ ಮೌಲ್ಯಮಾಪನದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉತ್ತೇಜನ ನೀಡಿತು. ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆಯ ಮೂಲಘಟಕ "ಬೆಲ್" ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆಯನ್ನು ಅಳೆಯುವ ಮಾನವು, $\frac{1}{10}$ ಬೆಲ್ ಅಥವಾ ಡೆಸಿಬೆಲ್. ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆಯ ಅನುಕ್ರಮ ಹಂತಗಳು – 1 ಬೆಲ್, 2 ಬೆಲ್‌ಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ (ಅಳೆಯುವ ಮಾನದಪ್ರಕಾರ,

10 ಡೆಸಿಬೆಲ್, 20 ಡೆಸಿಬೆಲ್ ಇತ್ಯಾದಿ)– ನಮ್ಮ ಕಿವಿಗೆ ಅಂಕಗಣಿತೀಯ ಸರಣಿಯಂತೆ ಕೇಳಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ, ಈ ಶಬ್ದಗಳ ಭೌತಿಕ ತೀವ್ರತೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅನುಪಾತ 10ರ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆಯಲ್ಲಿ 1 ಬೆಲ್ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 10 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಬೆಲ್ ಮಾನದಲ್ಲಿ ಭೌತಿಕ ತೀವ್ರತೆಯನ್ನೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಾಗರಿತಂ ಮೂಲಕ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿಷಯವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಲು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಎಲೆಗಳ ಮೃದು ಕಂಪನವನ್ನು ಬೆಲ್, ಏರುದನಿಯ ಸಂಭಾಷಣೆಯನ್ನು 6.5 ಬೆಲ್‌ಗಳು, ಸಿಂಹದ ಘರ್ಜನೆಯನ್ನು 8.7 ಬೆಲ್‌ಗಳು ಎಂದು ಅಂದಾಜು ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ, ಸಂಭಾಷಣೆಯ ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆಯು ತರಗೆಲೆಗಳ ಕಂಪನ ಶಬ್ದಕ್ಕಿಂತ 316 000 ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ :

$$10^{6.5-1} = 10^{5.5} = 316\ 000.$$

ಇದೇ ರೀತಿ, ಸಿಂಹದ ಘರ್ಜನೆಯ ತೀವ್ರತೆಯು ಸಂಭಾಷಣೆಗಿಂತ 158 ಪಟ್ಟು ಅಧಿಕ ಎಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

$$10^{8.7-6.5} = 10^{2.2} = 158.$$

ಎಂಟು ಬೆಲ್‌ಗಳಿಗಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮಾನದ ಶಬ್ದಗಳೆಲ್ಲ ಮಾನವ ಶರೀರಕ್ಕೆ ಹಾನಿಕರ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅನೇಕ ಕಾರ್ಖಾನೆಗಳಲ್ಲಿ ಶಬ್ದದ ಮಟ್ಟ ಜಾಸ್ತಿಯಾಗಿದೆ, ಅದು 10 ಬೆಲ್‌ಗಳು ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಉಕ್ಕಿನ ಹಾಳೆಗೆ ಸುತ್ತಿಗೆಯಿಂದ ಬಡಿದಾಗ 11 ಬೆಲ್‌ಗಳ ಶಬ್ದ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂಥ ಶಬ್ದಗಳು, ಎಚ್ಚರಿಕೆಯ ಮಿತಿಗಿಂತ 100 ರಿಂದ 1000 ಪಟ್ಟು ತೀವ್ರವಾಗಿದೆ; ಇವುಗಳ ತೀವ್ರತೆ ನಯಾಗರ ಜಲಪಾತದ ಹತ್ತಿರದ ಅತಿ ತೀವ್ರ ಸದ್ದಿನ ಜಾಗದಲ್ಲಿರುವುದಕ್ಕಿಂತ (ಅಲ್ಲಿನ ಶಬ್ದ 9 ಬೆಲ್‌ಗಳು) 10 ರಿಂದ 100ಪಟ್ಟು ಜಾಸ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ನಕ್ಷತ್ರಗಳ ಗೋಚರ ಪ್ರಕಾಶ ಮತ್ತು ಶಬ್ದದ ತೀವ್ರತೆ ಅಳೆಯುವಾಗ, ಇವುಗಳ ಕ್ರಿಯಾ ಮೂಲದ ಪರಿಮಾಣ ಹಾಗೂ ಸಂವೇದನಾ ಪರಿಮಾಣಗಳ ನಡುವಣ ಲಾಗರಿತಂ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಆಕಸ್ಮಿಕವೇ ? ಅಲ್ಲ. ಇವೆರಡೂ ಫೆಕ್ನರನ ನಿಯಮ ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯ ನಿಯಮದ ಪರಿಣಾಮಗಳು. ಈ ಮನೋ ಭೌತಿಕ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ, ಸಂವೇದನಾ (Sensory Response) ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯ ತೀವ್ರತೆಯು ಕ್ರಿಯಾಮೂಲದ (Stimulus) ತೀವ್ರತೆಗೆ ನೇರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ರೀತಿ, ಮನಶ್ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲೂ ಲಾಗರಿತಂಗಳು ಪ್ರವೇಶ ಪಡೆದಿವೆ.

ವಿದ್ಯುತ್ ಬೆಳಕಿನ ಪ್ರಕಾಶಕ್ಕೆ ಲಾಗರಿತಂಗಳು*

ಸಮಸ್ಯೆ :

ವಿದ್ಯುತ್ ತಂತುವಿನ ನಿರ್ವಾತ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳಿಗಿಂತ ಉಜ್ವಲ ಪ್ರಕಾಶವನ್ನು ಅನಿಲ – ತುಂಬಿದ ಬಲ್ಬ್‌ಗಳು ನೀಡಲು ಕಾರಣ, ಆ ತಂತುವಿನ ಅಧಿಕ ಉಷ್ಣತೆ. ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಒಂದು ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ, ಬಿಸಿ ತಂತುವಿನಿಂದ ಚಿಮ್ಮುವ ಬಿಳಿ ಪ್ರಕಾಶದ ಒಟ್ಟು ಪ್ರಮಾಣವು

* ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸಿರುವ ತತ್ವ – ಉಷ್ಣತೆಯ 12ನೆಯ ಘಾತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದು – ಒಪ್ಪತಕ್ಕುದಲ್ಲ. ಲೆಕ್ಕದ ಭಾಗ ಮಾತ್ರ ಸ್ವಾರಸ್ಯವಾಗಿದೆ. – *ಸಂಪಾದಕರು*

ನಿರಪೇಕ್ಷ ಉಷ್ಣತೆಯ 12ನೆಯ ಘಾತಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸತ್ಯಾಂಶಗಳ ಆಧಾರದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡೋಣ : ಅನಿಲ ತುಂಬಿದ ಬಲ್ಬೊಂದರ ತಂತುವಿನ ಉಷ್ಣತೆ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಮಾನದಲ್ಲಿ 2500° (–273 ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್‌ನಿಂದ ಅಳೆದಾಗ). ಇನ್ನೊಂದು ನಿರ್ವಾತ ಬಲ್ಬಿನ ತಂತುವಿನ ಉಷ್ಣತೆ 2200°. ಎರಡನೆಯ ಬಲ್ಬಿಗಿಂತ ಎಷ್ಟು ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚು ಬೆಳಕು ಮೊದಲನೆಯ ಬಲ್ಬಿನಿಂದ ಚಿಮ್ಮುತ್ತದೆ ?

ಉತ್ತರ :

ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಉತ್ತರವನ್ನು x ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಈಗ ಈ ಸಮೀಕರಣ ರಚಿಸಬಹುದು :

$$x = \left(\frac{2\ 500}{2\ 200}\right)^{12} = \left(\frac{25}{22}\right)^{12}$$

ಇದರಿಂದ,

$$\log x = 12(\log 25 - \log 22),\ x = 4.6.$$

ನಿರ್ವಾತ ಬಲ್ಬಿಗಿಂತ 46 ಪಟ್ಟು ಜಾಸ್ತಿ ಬೆಳಕು ಅನಿಲ–ತುಂಬಿದ ಬಲ್ಬಿನಿಂದ ಚಿಮ್ಮುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ನಿರ್ವಾತ ಬಲ್ಬೊಂದು 50 ವಾಟ್‌ಗಳದಾಗಿದ್ದರೆ. ಅದೇ ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲಿ ಅನಿಲ–ತುಂಬಿದ ಬಲ್ಬ್ 230 ವಾಟ್‌ಗಳದ್ದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ವಿದ್ಯುತ್ ಬಲ್ಬಿನ ಉಜ್ವಲತೆಯನ್ನು ಇಮ್ಮಡಿಗೊಳಿಸಲು, ನಿರಪೇಕ್ಷ ಉಷ್ಣತೆ (ಶೇಕಡಾ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ) ಎಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಬೇಕೆಂದು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕೋಣ.

ಉತ್ತರ :

ಈ ಸಮೀಕರಣ ರಚಿಸೋಣ :

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 2$$

ಇದರಿಂದ,

$$\log\left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{\log^2}{12} \text{ ಮತ್ತು } x = 6\%.$$

ಮತ್ತೊಂದು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡೋಣ. ವಿದ್ಯುತ್ ಬಲ್ಬಿನ ತಂತುವಿನ (ನಿರಪೇಕ್ಷ) ಉಷ್ಣತೆ 1% ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ, ಅದರ ಉಜ್ವಲತೆ ಎಷ್ಟು ಶೇಕಡಾ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ?

ಉತ್ತರ :

ಈ ಸಮೀಕರಣ ರಚಿಸೋಣ :

$$x = 1.01^{12},$$

ಇದನ್ನು ಲಾಗರಿತಂ ಬಳಸಿ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಉತ್ತರ :

$$x = 1.13.$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಉಜ್ವಲತೆ 13% ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ, ತಂತುವಿನ ಉಷ್ಣತೆ 2% ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಉಜ್ವಲತೆಯ ಹೆಚ್ಚಳ 27% ಎಂದೂ, ಉಷ್ಣತೆ 3% ಹೆಚ್ಚಾದಾಗ ಉಜ್ವಲತೆಯ ಹೆಚ್ಚಳ 43% ಎಂದೂ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ವಿವರಣೆಗಳಿಂದ, ವಿದ್ಯುತ್ ಬಲ್ಬಿನ ಉತ್ಪಾದನೆಯಲ್ಲಿ ತಂತುವಿನ ಉಷ್ಣತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಲು ತೀವ್ರ ಗಮನ ನೀಡುವುದು ಏಕೆಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಉಷ್ಣತೆಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಡಿಗ್ರಿ ಹೆಚ್ಚಳವೂ ಪ್ರಕಾಶವನ್ನು ಹಲವು ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತದೆ.

ನೂರಾರು ವರುಷಗಳ ಅವಧಿಯ ಉಯಿಲು

ಚದುರಂಗದ ಸಂಶೋಧಕನು ಬಹುಮಾನವಾಗಿ ಕೇಳಿದ ಗೋಧಿಕಾಳುಗಳ ಬೃಹತ್ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕುರಿತು ದಂತಕತೆಯನ್ನು ಕೇಳದವರಾರು ? ಒಂದಂಕಿಯನ್ನು ಸತತವಾಗಿ ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲಾಯಿತು; ಚದುರಂಗದ ಹಾಸಿನ ಮೊದಲನೆಯ ಚೌಕಕ್ಕೆ ಒಂದು ಕಾಳು, ಎರಡನೆಯ ಚೌಕಕ್ಕೆ ಎರಡು ಕಾಳುಗಳು – ಈ ರೀತಿ 64ನೆಯ ಚೌಕದ ತನಕ ಪ್ರತಿ ಬಾರಿ ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಲಾಯಿತು.

ಈ ಪ್ರಕಾರ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿದಾಗ, ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನಿರೀಕ್ಷಿತ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತವೆ, ಸಂಖ್ಯಾ ಹೆಚ್ಚಳದ ಪ್ರಮಾಣವು ಸಾಧಾರಣವಾಗಿದ್ದಾಗಲೂ ಹೀಗೆಯೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಬಂಡವಾಳವನ್ನು 5% ಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದಾಗ, ಅದು 1.05ರ ವಾರ್ಷಿಕ ದರದಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತದೆ. ಇದು ಗಣನೀಯ ಹೆಚ್ಚಳವಲ್ಲ ಎಂದೆನಿಸುತ್ತದೆ; ಆದರೆ, ಕಾಲಾವಧಿ ದೀರ್ಘವಾಗಿದ್ದರೆ, ಈ ದರದಲ್ಲೂ ಬಂಡವಾಳ ಬೃಹತ್ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ, ಉಯಿಲಿನ ಮೂಲಕ ದೀರ್ಘಾವಧಿಗೆ ಬಿಟ್ಟುಹೋದ ಬಂಡವಾಳ ದಂಗುಬಡಿಸುವಂತೆ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ. ಉಯಿಲು ಬರೆದು ತೀರಿಕೊಂಡವನು, ಸಣ್ಣ ಮೊತ್ತದ ಹಣವನ್ನು ಉಳಿಸಿ, ಭಾರಿ ಮೊತ್ತದ ಪಾವತಿಗೆ ನಿರ್ದೇಶನಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ಹೋಗಬಲ್ಲನೆಂಬುದು ವಿಚಿತ್ರವಾಗಿ ತೋರುತ್ತದೆ. ಅಮೇರಿಕದ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ರಾಜನೀತಿಜ್ಞ ಬೆಂಜಮಿನ್ ಫ್ರಾಂಕ್ಲಿನ್ ಬಿಟ್ಟುಹೋದ ತೀರಾ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಉಯಿಲಿನ ಸ್ಥೂಲ ವಿವರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ಬೆಂಜಮಿನ್ ಫ್ರಾಂಕ್ಲಿನ್ ತನ್ನ ಉಯಿಲಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾವಿರ ಪೌಂಡ್ ಸ್ಟರ್ಲಿಂಗ್‌ಗಳನ್ನು ಬೋಸ್ಟನ್ ನಗರವಾಸಿಗಳಿಗೆ ಬಿಟ್ಟುಹೋದ. ಆ ನಗರದ ಅತಿ ಗೌರವಾನ್ವಿತ ನಾಗರಿಕರ ಜವಾಬ್ದಾರಿಯಲ್ಲಿ ಆ ಹಣ ಇರಿಸಬೇಕೆಂದೂ, ಅದರಿಂದ 5% ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ಯುವ ಕರಕುಶಲ ಕೆಲಸಗಾರರಿಗೆ ಸಾಲ ನೀಡಬೇಕೆಂದೂ ಉಯಿಲಿನಲ್ಲಿ ವಿನಂತಿಸಿದ್ದ (ಆಗಿನ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅಮೇರಿಕದ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ವಾಣಿಜ್ಯ ಸಾಲ ನೀಡುವ ಸಂಸ್ಥೆಗಳು ಇರಲಿಲ್ಲ). ಒಂದು ನೂರು ವರುಷಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಮೊತ್ತವು ಹೆಚ್ಚುತ್ತಾ 131 000 ಪೌಂಡ್ ಸ್ಟರ್ಲಿಂಗ್‌ಗಳಾಗುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ 100 000 ಪೌಂಡ್‌ಗಳನ್ನು ಮುನಿಸಿಪಾಲಿಟಿ ಕಟ್ಟಡಗಳ ನಿರ್ಮಾಣಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಬೇಕೆಂದೂ, ಉಳಿದ 31 000 ಪೌಂಡ್‌ಗಳನ್ನು 100 ವರುಷಗಳ ಅವಧಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಬೇಕೆಂದೂ ಆದೇಶಿಸಿದ್ದ. ಎರಡನೆಯ ಶತಮಾನದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಈ ಬಂಡವಾಳ ಬೆಳೆದು 4 060 000 ಪೌಂಡ್ ಸ್ಟರ್ಲಿಂಗ್‌ಗಳಾಗುವುದು; ಇದರಲ್ಲಿ 1 060 000 ಪೌಂಡ್‌ಗಳನ್ನು ಬೋಸ್ಟನ್ ನಗರವಾಸಿಗಳಿಗೆ ಅವರ ವಿವೇಚನೆಯ ಅನುಸಾರ ಬಳಸಲು ನೀಡಬೇಕೆಂದೂ, 3 000 000 ಪೌಂಡ್‌ಗಳನ್ನು ಮೆಸಾಚುಸೆಟ್ಸ್‌ನ ಸಮುದಾಯದ ನಿರ್ವಹಣೆಗೆ ನೀಡಬೇಕೆಂದೂ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದ್ದ. ಇದಕ್ಕಿಂತ ಮುಂದಿನ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ, ವೃದ್ಧಿಯಾಗುವ ತನ್ನ ಹಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಳಸಬೇಕೆಂಬ ಬಗ್ಗೆ ನಿರ್ದೇಶನಗಳನ್ನು ನೀಡುವ ಗೋಜಿಗೆ ಬೆಂಜಮಿನ್ ಫ್ರಾಂಕ್ಲಿನ್ ಹೋಗಲಿಲ್ಲ.

ಅವನು ಬಿಟ್ಟುಹೋದ ಹಣ ಕೇವಲ 1000 ಪೌಂಡ್‌ಗಳು. ಆದರೆ ಮಿಲಿಯಗಟ್ಟಲೆ ಪೌಂಡ್‌ಗಳ ಬಳಕೆಯ ಆದೇಶಗಳನ್ನಿತ್ತಿದ್ದ ! ಇದು ಅಸಂಗತವಲ್ಲ. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಿದರೆ,

ಇದರ ತರ್ಕ ಸಮಂಜಸವೆಂದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ವರುಷವೂ 1000 ಪೌಂಡ್‌ಗಳು 1.05 ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 100 ವರುಷಗಳಲ್ಲಿ ದೊರಕುವ ಮೊತ್ತ :

$$x = 1000 \times 1.05^{100} \text{ ಪೌಂಡ್‌ಗಳು.}$$

ಲಾಗರಿತಂಗಳ ನೆರವಿನಿಂದ ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿದಾಗ,

$$\log x = \log 1000 + 100 \log 1.05 = 5.11893,$$

ಇದರಿಂದ,

$$x = 131\,000,$$

ಈ ಮೊತ್ತ ಫ್ರಾಂಕ್ಲಿನನ ಉಯಿಲಿನಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ಮೊತ್ತವೇ ಆಗಿದೆ. ಬಳಿಕ 31 000 ಪೌಂಡ್‌ಗಳು ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿ ಮುಂದಿನ ಶತಮಾನದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ದೊರಕುವ ಮೊತ್ತ :

$$y = 31\,000 \times 1.05^{100},$$

ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಿದಾಗ,

$$y = 4\,076\,500$$

ಇದೂ ಆ ಉಯಿಲಿನಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದ ಮೊತ್ತವೇ ಆಗಿದೆ.

ರಷ್ಯನ್ ಬರಹಗಾರ ಸಾಲ್ಟಿಕೋವ್-ಶ್ಚೆಡ್ರಿನ್‌ನ *'ದಿ ಮೆಸ್ಸೈರ್ಸ್ ಗೊಲೊವ್‌ಲೆವ್'* *(The Messieurs Golovlev)* ಪುಸ್ತಕದಿಂದ ಆಯ್ದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಓದುಗರು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬಹುದು.

"ಪೊರ್‌ಫಿರಿ ವ್ಲಾಡಿಮಿರೊವಿಚ್ ಕೆಲವು ಕಾಗದದ ಹಾಳೆಗಳಲ್ಲಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುತ್ತಾ ತನ್ನ ಅಧ್ಯಯನ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾನೆ. ಅವನ ಆಸಕ್ತಿ ಕೆದಕಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆ: ಅವನ ಅಜ್ಜ ಅವನು ಹುಟ್ಟಿದಾಗ ಅವನಿಗೆ 100 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರು; ಅವನ ತಾಯಿ ಅದನ್ನು ಖರ್ಚು ಮಾಡದೆ, ಅವನ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ್ದರೆ, ಅದೀಗ ಎಷ್ಟು ದೊಡ್ಡ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿತ್ತು ? ಅವನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದ ಪ್ರಕಾರ, ಅದು ಸಣ್ಣ ಮೊತ್ತವೆಂದು ತಿಳಿಯಿತು – ಕೇವಲ 800 ರೂಪಾಯಿಗಳಾಗುತ್ತಿತ್ತು."

ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡುವಾಗ ಪೊರ್‌ಫಿರಿಯ ವಯಸ್ಸು 50 ವರುಷಗಳಾಗಿತ್ತೆಂದೂ, ಅವನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸರಿಯಾಗಿ ಮಾಡಿದನೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿ, (ಗೊಲೊವ್‌ಲೆವ್‌ಗೆ ಲಾಗರಿತಂ ಬಗ್ಗೆ ಗೊತ್ತಿಲ್ಲದಿರುವ ಸಂಭವ ಜಾಸ್ತಿ, ಹಾಗಾಗಿ ಚಕ್ರ ಬಡ್ಡಿ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಕಷ್ಟಸಾಧ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿನ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಸರಿಯೆಂದು ಹೇಳುವಂತಿಲ್ಲ). ಅವನು ಗಳಿಸಬಹುದಾಗಿದ್ದ ಬಡ್ಡಿಯ ಮೊತ್ತವನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ.

ಬಂಡವಾಳದ ಸತತ ವೃದ್ಧಿ

ಉಳಿತಾಯ ಬ್ಯಾಂಕುಗಳಲ್ಲಿ, ಬಂಡವಾಳಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ವರ್ಷಾಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಅವಧಿಗೆ ಅಸಲಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, ಬಂಡವಾಳ ಹೆಚ್ಚು ವೇಗವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ; ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾರಿ ಬಡ್ಡಿಗಳಿಸುವ ಹಣದ ಮೊತ್ತ ಅಧಿಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ತೀರಾ ಸರಳವಾದ ಸೈದ್ಧಾಂತಿಕ ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಉಳಿತಾಯ ಬ್ಯಾಂಕಿನಲ್ಲಿ 100 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಠೇವಣಿಯನ್ನು 100% ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ಡಿ ದರದಲ್ಲಿ

ಇರಿಸಲಾಯಿತೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ವರ್ಷಾಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಅಸಲಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಸೇರಿಸುವುದಾದರೆ, 100 ರೂಪಾಯಿ ಬಂಡವಾಳವು 200 ರೂಪಾಯಿಗಳಾಗಲು ಒಂದು ವರುಷ ತಗಲುತ್ತದೆ. ಈಗ, ಅರ್ಧ–ವರ್ಷಾಂತ್ಯಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ಅಸಲಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಸೇರಿಸುತ್ತಿದ್ದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಮೊದಲನೆಯ ಅರ್ಧ–ವರ್ಷಾಂತ್ಯದಲ್ಲಿ 100 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಅಸಲಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಸೇರಿ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತ :

100 ರೂಪಾಯಿಗಳು $\times 1.5 = 150$ ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಎರಡನೆಯ ಅರ್ಧ–ವರ್ಷಾಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿ ಸೇರಿ ದೊರಕುವ ಮೊತ್ತ :

150 ರೂಪಾಯಿಗಳು $\times 1.5 = 225$ ರೂಪಾಯಿಗಳು.

ಇದೇ ರೀತಿ, 100 ರೂಪಾಯಿಗಳ ಬಂಡವಾಳಕ್ಕೆ $\frac{1}{3}$ ವರುಷಕ್ಕೊಮ್ಮೆ ಬಡ್ಡಿ ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, ಮೊದಲ ವರ್ಷಾಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಒದಗುವ ಮೊತ್ತ ;

100 ರೂಪಾಯಿಗಳು. $\left(1\frac{1}{3}\right)^3 \approx 237$ ರೂಪಾಯಿಗಳು ಮತ್ತು 3 ಪೈಸೆಗಳು.

ಈಗ ಇನ್ನೂ ಕ್ಷಿಪ್ರವಾಗಿ ಅಸಲಿಗೆ ಬಡ್ಡಿ ಸೇರಿಸೋಣ: ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಅಸಲಿಗೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು 0.1 ವರುಷ, 0.01 ವರುಷ, 0.001 ವರುಷ ಅವಧಿಗೊಮ್ಮೆ ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗೋಣ. ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಮೊದಲ ವರ್ಷಾಂತ್ಯದಲ್ಲಿ 100 ರೂಪಾಯಿಗಳಿಂದ ಸಿಗುವ ಮೊತ್ತ :

100 ರೂಪಾಯಿಗಳು $\times 1.1^{10} \approx 259$ ರೂಪಾಯಿಗಳು 37 ಪೈಸೆಗಳು,

100 ರೂಪಾಯಿಗಳು $\times 1.01^{100} \approx 270$ ರೂಪಾಯಿಗಳು 48 ಪೈಸೆಗಳು,

100 ರೂಪಾಯಿಗಳು $\times 1.001^{1000} \approx 271$ ರೂಪಾಯಿಗಳು 69 ಪೈಸೆಗಳು.

ಉನ್ನತ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ ಆಧಾರದಿಂದ ನಾವು ಈ ಮುಂದಿನ ವಾದವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು : ಬಡ್ಡಿ ಸೇರಿಸುವ ಅವಧಿಯ ಅಂತರವನ್ನು ಮಿತಿಯಿಲ್ಲದೆ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುತ್ತಾ ಹೋದರೆ, ಬಂಡವಾಳವು ಮಿತಿಯಿಲ್ಲದೆ ಬೆಳೆಯುವುದಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಬಂಡವಾಳವು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಮಿತಿಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಾ ಬರುತ್ತದೆ. ಅದು ಸರಿಸುಮಾರು (ಪೈಸೆಯ ಭಿನ್ನಾಂಶಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿಲ್ಲ) :

271 ರೂಪಾಯಿಗಳು ಮತ್ತು 83 ಪೈಸೆಗಳು.

100% ಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿಸಿದ ಬಂಡವಾಳಕ್ಕೆ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಸೆಕೆಂಡಿಗೊಮ್ಮೆ ಕೂಡಿಸುತ್ತಿದ್ದರೂ, ಅದು ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯಾಗುವ ವೇಗವು 2.7183 ಪಟ್ಟು ಮೀರುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಂಖ್ಯೆ e

ಉನ್ನತ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ 2.718... ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮೂಲಭೂತ ಪಾತ್ರವಹಿಸುತ್ತದೆ (ಇದರ ಪಾತ್ರ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ π ಯಷ್ಟೇ ಗಣನೀಯ ಎನ್ನಬಹುದು. ಇದರ ವಿಶೇಷ ಸಂಕೇತ : e. ಇದೊಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ; ಅಂದರೆ ಎಷ್ಟೇ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದರೂ ಇದನ್ನು ಪರಿಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಸೂಚಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.* ಇದನ್ನು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸರಣಿಯ ಮೂಲಕ, ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ (ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯವಾದ ನಿಖರತೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ) ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ :

* ಅದಲ್ಲದೆ, π ಯಂತೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಅಗಮ್ಯ; ಅಂದರೆ, ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಕೇತಾಂಕಗಳಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \ldots$$

ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಲ್ಲಿ ಬಂಡವಾಳ ಬೆಳೆಯುವ ಈ ಮುಂಚಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ, e ಸಂಖ್ಯೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸೂತ್ರ ರೂಪದ ಮಿತಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದು :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ಏಕೆಂದರೆ, n ಅನ್ನು ಮಿತಿಯಿಲ್ಲದೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಬಹುದು.

ಹಲವು ಕಾರಣಗಳಿಗಾಗಿ, e ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಲಾಗರಿತಂಗಳ ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ (Base) ಬಳಸುವುದು ಅತ್ಯನುಕೂಲ (ಆ ಕಾರಣಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲು ಆಸ್ಪದವಿಲ್ಲ). ಅಂಥ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು ("ನ್ಯಾಚುರಲ್ ಲಾಗರಿತಂಗಳ" ಕೋಷ್ಟಕಗಳು) ಲಭ್ಯವಿವೆ; ಅವನ್ನು ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್‌ನಲ್ಲಿ ಹಲವಾರು ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗೆ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸಿದ, 48, 61, 102 ಮತ್ತು 260 ಸ್ಥಾನಗಳಿರುವ ಅಪ್ರತಿಮ ಉದ್ದದ ಲಾಗರಿತಂಗಳಲ್ಲಿ e ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಧಾರ ಸಂಖ್ಯೆ (Base) ಆಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಅನಿರೀಕ್ಷಿತ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ e ಸಂಖ್ಯೆ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

'a' ಎಂಬ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗುವಂತೆ ಅದನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ?

ನಿಶ್ಚಿತ ಮೊತ್ತ ನೀಡುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಮಗೀಗಾಗಲೇ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, a ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಆದರೆ ಎಷ್ಟು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕು ? ಎರಡು, ಮೂರು ಅಥವಾ ಹತ್ತು ಭಾಗಗಳೇ ? ಉನ್ನತ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ, ಸಂಖ್ಯಾ ಭಾಗಗಳ ಮೌಲ್ಯ e ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಹತ್ತಿರವಾದಾಗ, ಗುಣಲಬ್ಧ ಗರಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಸಂಖ್ಯೆ 10ನ್ನು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ; ಈ ಸಮ ಭಾಗಗಳು 2.718... ಗೆ ಎಷ್ಟು ಸಾಧ್ಯವೋ ಅಷ್ಟು ಹತ್ತಿರವಾಗಬೇಕು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ, ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು :

$$\frac{10}{2.718\ldots} = 3.678\ldots$$

ಸಂಖ್ಯೆ 10ನ್ನು 3.678... ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದ್ದರಿಂದ, ಇದಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಂತ ಹತ್ತಿರದ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದ 4ನ್ನು ಭಾಜಕವಾಗಿ ಆರಿಸೋಣ. ಈ ಪ್ರಕಾರ 10ರ ಭಾಗಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವೂ $\frac{10}{4}$ ಅಥವಾ 2.5 ಆಗಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ, 10ರ ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಗುಣಿಸಿ ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ :

$$(2.5)^4 = 39.0625$$

ಇದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು, 10ನ್ನು 3 ಅಥವಾ 5 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ, ಆ ಭಾಗಗಳನ್ನೆಲ್ಲ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 = 37,$$

$$\left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32.$$

ಸಂಖ್ಯೆ 20ರ ಭಾಗಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಗುಣಲಬ್ಧ ಪಡೆಯಲು ಅದನ್ನು 7 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಯಾಕೆಂದರೆ,

$$20 \div 2.718... = 7.36 \approx 7.$$

ಇದೇ ರೀತಿ, ಸಂಖ್ಯೆ 50ನ್ನು 18 ಭಾಗಗಳಾಗಿ, ಸಂಖ್ಯೆ 100ನ್ನು 37 ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಯಾಕೆಂದರೆ,

$$50 \div 2.718... = 18.4,$$

$$100 \div 2.718... = 36.8.$$

ಗಣಿತ, ಭೌತವಿಜ್ಞಾನ, ಖಗೋಳ ವಿಜ್ಞಾನ ಮತ್ತು ಇತರ ವಿಜ್ಞಾನಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆ 'e' ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಗಳಲ್ಲಿ 'e' ಯನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕೆಲವು ವೈಜ್ಞಾನಿಕ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಲಾಗಿದೆ (ಈ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಅನಂತವಾಗಿ ಬೆಳೆಸಬಹುದು).

ವಾಯು ಭಾರ ಮಾಪಕದ ಎತ್ತರದ ಸೂತ್ರ (ಎತ್ತರ ಹೆಚ್ಚಿದಂತೆ ಒತ್ತಡ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದು).

ಆಯ್ಲರ್‌ನ ಸೂತ್ರ (ಯಾಕೊವ್ ಪೆರೆಲ್ಮನ್ ಅವರ '*ಮನರಂಜನೆಗಾಗಿ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ*' ಪುಸ್ತಕದ ಎರಡನೆಯ ಭಾಗದ "ಜೂಲ್ಸ್ ವರ್ನೆಯ ಬಲಿಷ್ಠ ಮನುಷ್ಯ ಮತ್ತು ಯೂಲರನ ಸೂತ್ರ" ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯ ನೋಡಿ).

ವಸ್ತುಗಳ ಶಾಖ ವಿಸರ್ಜನೆಯ ನಿಯಮ

ವಿಕಿರಣ ಕ್ಷಯ ಮತ್ತು ಭೂಮಿಯ ಪ್ರಾಯ

ವಾಯು ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲಿ ಲೋಲಕದ ಆಂದೋಲನಗಳು

ತ್ಸಿಯೊಲ್‌ಕೊವ್‌ಸ್ಕಿಯ ರಾಕೆಟ್ ವೇಗಗಳ ಸೂತ್ರ (*ಅಂತರ ಗ್ರಹ ಯಾತ್ರೆ* ಪುಸ್ತಕ ನೋಡಿ)

ರೇಡಿಯೋ ಮಂಡಲದಲ್ಲಿ ಆಂದೋಲನ ಗುಣ

ಜೀವಕೋಶಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆ

ಒಂದು ಲಾಗರಿತಂ ಚಮತ್ಕಾರ

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಅಧ್ಯಾಯ–5 ರಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದ ಗಣಿತ ಚಮತ್ಕಾರದಂತಹ ಇನ್ನೊಂದು ಸವಾಲು : $2>3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ. ಈಗ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ಬಳಸೋಣ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸ್ಪಷ್ಟ ಅಸಮಾನತೆಯಿಂದ ಚಮತ್ಕಾರ ಆರಂಭವಾಗುತ್ತದೆ :

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8},$$

ಇದು ನಿಜ. ಇವನ್ನು ಘಾತಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದಾಗ,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

ಇದನ್ನೂ ಅಲ್ಲಗಳೆಯಲಾಗದು. ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಲಾಗರಿತಂ ಕೂಡ ಅಧಿಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$2\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > 3\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right);$$

ಇದರಿಂದ $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ ಕಳಚೋಣ. ಈಗ, $2>3$.

ಈ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ತಪ್ಪೆಲ್ಲಿದೆ ?

ಉತ್ತರ :

ಇದರಲ್ಲಿ $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ ಅನ್ನು ಕಳಚಿದಾಗ, ಅಸಮಾನತೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹಿಂದು ಮುಂದಾಗಿಸದಿದ್ದುದೇ ($>$ ಬದಲಾಗಿ $<$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸದಿದ್ದುದೇ) ನಾವು ಮಾಡಿದ ತಪ್ಪು; ಅಸಮಾನತೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹಿಂದು ಮುಂದಾಗಿಸಬೇಕಿತ್ತು. ಯಾಕೆಂದರೆ $\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ ಎಂಬುದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇಲ್ಲಿ 10ರ ಬದಲಾಗಿ, $\frac{1}{2}$ ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾದ ಘಾತಮೂಲ n ಗೆ ಲಾಗರಿತಂಗಳನ್ನು ತೆಗೆದಿದ್ದರೆ, $\log_n\left(\frac{1}{2}\right)$ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತಿತ್ತು; ಆದರೆ, ಈ ರೀತಿ ಲಾಗರಿತಂ ತೆಗೆದಿದ್ದರೆ, ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಲಾಗರಿತಂ ಕೂಡ ಅಧಿಕ ಎಂದು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಾಗುತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ.

ಮೂರು ಬಾರಿ ಎರಡು ಬಳಸಿ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆ ಸೂಚಿಸುವುದು

ಸಮಸ್ಯೆ :

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಒಡೆಸ್ಸಾದಲ್ಲಿ ಜರಗಿದ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನಿಗಳ ಸಮ್ಮೇಳನದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಗಳನ್ನು ಚಕಿತಗೊಳಿಸಿದ ಜಾಣ್ಮೆಯ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದಿಗೆ ಮುಕ್ತಾಯಗೊಳಿಸೋಣ. ಆ ಸಮಸ್ಯೆ : ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಮೂರು ಬಾರಿ ಎರಡಂಕಿಯನ್ನೂ ಮತ್ತು ಅಗತ್ಯವೆನಿಸಿದ ಗಣಿತ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ಸೂಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ?

ಉತ್ತರ :

ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಸಮಸ್ಯೆಯ ಷರತ್ತುಗಳ ಪ್ರಕಾರ ಸೂಚಿಸಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಎಂದಿರಲಿ. ಇದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ವಿಧಾನ :

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣ ಸರಿಯೆಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಯಾಕೆಂದರೆ,

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{2^3}} = 2^{2^{-3}},$$

$$\log_2 2^{2^{-3}} = 2^{-3}, \ -\log_2 2^{-3} = 3.$$

ಇದೇ ರೀತಿ, ಸಂಖ್ಯೆ 5ನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು :

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಘಾತಾಂಕ ಸೂಚಕ 2ನ್ನು ಬಳಸುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ರೂಢಿಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪ್ರಕಾರ, ಎಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯವಾಗುವ ಸೂತ್ರ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುತ್ತದೆ. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ N ಎಂದಿರಲಿ. ಇದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸೂತ್ರ :

$$N = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{N\text{ಬಾರಿ}},$$

ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ, ವರ್ಗಮೂಲ ಸೂಚಕ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಏಕ ಘಟಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

■

ವಿಜ್ಞಾನ – ಸರಳ ಪರಿಚಯ

(ಹಿರಿಯ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಾಗೂ ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪೂರಕ ಪಠ್ಯ)

(ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದಕರು : ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ)

ಬೆಳಕು	*ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ*
ಬಲ ಮತ್ತು ಚಲನೆ	*ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ*
ಒತ್ತಡ	*ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ*
ಶಾಖ ಮತ್ತು ಶಬ್ದ	*ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ*
ಪರಮಾಣು ನ್ಯೂಕ್ಲಿಯಸ್	*ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ*
ವಿದ್ಯುತ್ತು, ಕಾಂತತ್ವ ಮತ್ತು ವಿದ್ಯುತ್ಕಾಂತತ್ವ	*ಪ್ರೊ॥ ಡಿ. ಆರ್. ಬಳೂರಗಿ*
ವಿದ್ಯುನ್ಮಾನ ವಿದ್ಯಮಾನಗಳು	*ಎಸ್. ಕ್ಷಮಾ*
ಅಣು, ಪರಮಾಣು ಮತ್ತು ಸಂಯುಕ್ತಗಳು	*ಡಾ॥ ಹೆಚ್. ರಾಮಚಂದ್ರ ಸ್ವಾಮಿ*
ಗಾಳಿ ಮತ್ತು ಅನಿಲಗಳು	*ಡಾ॥ ಹೆಚ್. ರಾಮಚಂದ್ರ ಸ್ವಾಮಿ*
ಇಂಧನಗಳು	*ಡಾ॥ ಹೆಚ್. ರಾಮಚಂದ್ರ ಸ್ವಾಮಿ*
ರಾಸಾಯನಿಕ ಧಾತುಗಳು	*ಪ್ರೊ॥ ಆರ್. ವೇಣುಗೋಪಾಲ್, ಪ್ರೊ॥ ಬಿ. ಎಸ್. ಜೈಪ್ರಕಾಶ್*
ಆಮ್ಲ, ಪ್ರತ್ಯಾಮ್ಲ ಮತ್ತು ಲವಣಗಳು	*ಪ್ರೊ॥ ಆರ್. ವೇಣುಗೋಪಾಲ್, ಪ್ರೊ॥ ಬಿ. ಎಸ್. ಜೈಪ್ರಕಾಶ್*
ಸರಳ ಕಾರ್ಬನಿಕ ರಸಾಯನವಿಜ್ಞಾನ	*ಪ್ರೊ॥ ಆರ್. ವೇಣುಗೋಪಾಲ್, ಪ್ರೊ॥ ಬಿ. ಎಸ್. ಜೈಪ್ರಕಾಶ್*
ಕಾರ್ಬನ್	*ಡಾ॥ ಸರ್ವೋತ್ತಮ ವೈ. ಅಂಬೇಕರ*
ನೀರು	*ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ*
ಜೀವಿ ವೈವಿಧ್ಯ ಮತ್ತು ವಿಕಾಸ	*ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ*
ಜೀವಾವಾಸಗಳು : ನೆಲೆಸು – ಬೆಳೆಸು	*ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ*
ಪ್ರಜನನ	*ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ*
ಜೈವಿಕ ತಂತ್ರಜ್ಞಾನ	*ಡಾ॥ ಎನ್. ಎಸ್. ಲೀಲಾ*
ಜೀವಕೋಶ ಮತ್ತು ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಗಳು	*ಡಾ॥ ಪಿ. ಕೆ. ರಾಜಗೋಪಾಲ್*
ಸಸ್ಯಗಳು	*ಸುಮಂಗಲ ಎಸ್. ಮುಮ್ಮಿಗಟ್ಟಿ*
ಪ್ರಾಣಿಗಳು	*ಸುಮಂಗಲ ಎಸ್. ಮುಮ್ಮಿಗಟ್ಟಿ*
ಮಾನವ ದೇಹ	*ಡಾ॥ ಸಿ. ಆರ್. ಚಂದ್ರಶೇಖರ್*
ರೋಗಗಳು ಮತ್ತು ಚಿಕಿತ್ಸೆ	*ಡಾ॥ ಸಿ. ಆರ್. ಚಂದ್ರಶೇಖರ್*
ನಮ್ಮ ದಿನನಿತ್ಯದ ಆಹಾರ	*ಡಾ॥ ನಾ. ಸೋಮೇಶ್ವರ*
ಜ್ಞಾನೇಂದ್ರಿಯಗಳು	*ಡಾ॥ ನಾ. ಸೋಮೇಶ್ವರ*
ಪರಿಸರ ಅಧ್ಯಯನ	*ಡಾ॥ ಎಚ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ*
ನೈಸರ್ಗಿಕ ಸಂಪನ್ಮೂಲಗಳು	*ಡಾ॥ ಎಚ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ*
ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ	*ಡಾ॥ ಜಿ. ಕೆ. ವೀರೇಶ್, ಅಡ್ಡೂರು ಕೃಷ್ಣರಾವ್*